天体力学引论



J. 柯瓦列夫斯基 著

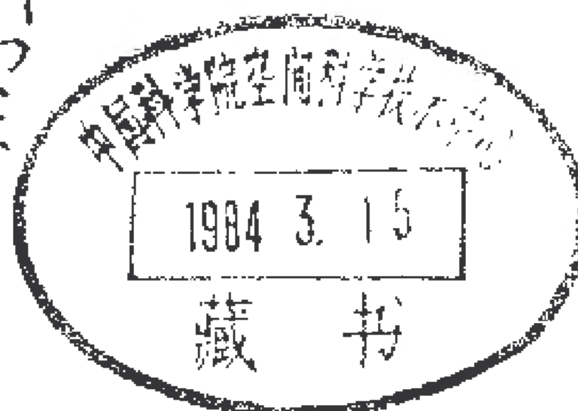
科学出版社

天体力学引论

J. 柯氏列夫斯基 著

黄坤仪 译

易照华 校



科学出版社

1984

内 容 简 介

本书是一部天体力学方面的专著。全书共分七章：前四章介绍了天体力学原理、二体问题、正则方程组和摄动理论；第五章采用柴倍耳方法详细讨论人造卫星在地球引力场中的运动；最后两章介绍了天体力学经典理论的一些内容。本书的特点是，结构严谨，叙述简练。本书可供天文、地球物理、大地测量等方面的工作人员阅读参考。

J. Kovalevsky

INTRODUCTION TO CELESTIAL MECHANICS

D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, 1967

天 体 力 学 引 论

J. 柯瓦列夫斯基 著

黄坤仪 译

易照华 校

责任编辑 夏墨英

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984 年 3 月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1984 年 3 月第一次印刷　　印张：5 3/8

印数：0001—3,100　　字数：119,800

统一书号：13031·2509

本社书号：3448·13—5

定价： 0.85 元

前　　言

当作为行星际飞船先驱的第一批人造卫星上天之后，天体力学就不再是只有少数天文学家和数学家感兴趣的科学，而成为一门专门的工程技术了.

我力求用这种新的见解来撰写此书，在选择经典天体力学实例时，加以严格限制，并且仅保留那些对计算空间物体轨道有用的部分.

第五章是本书的主要章节. 在这一章中，应用柴倍耳和勃劳威尔方法，给出了地球引力场中人造卫星运动问题的详解，并表明怎样用拉格朗日方程求解这个问题.

开头的四章介绍了学习这两种方法所必须具备的知识：二体问题的椭圆解和天体力学的基本运算；一些分析力学的定理；德洛勒变量和根数变差的拉格朗日方程；摄动函数的展开和为这种展开所必需的白塞耳函数.

最后两章叙述性比较强. 在这两章中，我简要地介绍了天体力学经典理论的一些内容，力图说明它们的特征，但不作详细的讨论.

最后，在第七章末尾，我又返回到技术性较强问题的讨论. 我介绍了微分方程数值积分的一种方法，它可用于解决不要求分析解的任何轨道问题.

柯瓦列夫斯基 (J. Kovalevsky)

目　　录

第一章　天体力学的原理

天体力学实质上是应用力学的普遍定律来研究引力作用下天体的运动和平衡的科学. 天体力学的原理就是一般力学的原理,其中必须再加上万有引力定律.

1. 一般力学的基本定律

由于一般力学的基本定律在天体力学中的重要性，我们需要在这里作一回顾. 需要进一步了解这个问题的读者，可以参考任何一本论述经典力学的书籍. 我们承认质量的概念,也承认空间坐标系(称为伽利略参考系或惯性参考系)的存在. 在这种坐标系中,一般力学的定律是成立的. 最后,我们还承认称为时间的变量，这种时间是处处同时被感受到的(绝对时间). 在这些条件下,力学的基本定律如下所述:

当一个物质系统在惯性参考系中处于静止或运动状态时,作用在此系统上的外力向量组等于惯性力向量组:

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \boldsymbol{\gamma}_i. \tag{1}$$

其中，m_i 和 γ_i 是物质系统中第 i 个组元的质量和加速度.

特别是当系统是单个的质点,而向量 $\mathbf{F}$ 代表作用在此质点上的合力时,则有

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\gamma}.$$

其中,m 是质点的质量，$\boldsymbol{\gamma}$ 是质点的加速度.

另一种特例是没有外力作用在质点上,此时加速度为零,质点作匀速直线运动. 由此直接得出的推论是: 两个惯性系或者相对静止,或者相对作匀速直线运动.

通常我们将在一个惯性系中列出力学方程. 但是，当考察物质系统在另一不同的系统中运动的时候，必须把附加的加速度产生的惯性力加到外力上去.

2. 力学的一般定理

力学的一般定理是力学基本定律的推论，是力学用于处理特殊情况的实际形式.

A. 引力中心运动定理

物质系统引力中心的运动就好像整个系统的物质都集聚在这个中心,而所有的外力都作用在它的上面一样.

设 O 是参考原点, G 是物质系统的引力中心,则有

$$\mathbf{OG} = \frac{\Sigma m\mathbf{OP}}{\Sigma m},$$

其中位于 P 点的质量为 m.

令物质系统的总质量 M 等于 Σm，得

$$M\mathbf{OG} = \Sigma m\mathbf{OP}.$$

求两次导数,得

$$M\boldsymbol{\gamma}_g = \Sigma m \frac{d^2\mathbf{OP}}{dt^2} = \Sigma\mathbf{F}_e. \tag{2}$$

其中,第二等式就是基本方程 (1).

B. 角动量定理

物质系统对于 O 点的角动量的时间导数，在任何时刻都等于各外力对同一 O 点的力矩之和.

物质系统的角动量定义为

$$\boldsymbol{\sigma} = \Sigma(\mathbf{OP}\wedge m\mathbf{V}_p),$$

由此得

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \Sigma\left(\frac{d\mathbf{OP}}{dt}\wedge m\mathbf{V}_p\right) + \Sigma\left(\mathbf{OP}\wedge m\frac{d\mathbf{V}_p}{dt}\right).$$

上式右端第一个向量积为零,故得

$$\frac{d\sigma}{dt} = \Sigma(m\mathbf{OP} \wedge \boldsymbol{\gamma}_P). \tag{3}$$

角动量定理的一个直接推论是：如果外力矩为零或外力为有心力，$\frac{d\sigma}{dt} = 0$，角动量 σ 为常向量[1]，物质系统的质心在一个平面内运动.

C. 动能定理

物质系统在 t_0—t_1 时间间隔内动能的变化等于在同一期间内作用在此系统上的内力和外力所作的功的总和.

物质系统的动能定义为系统的全部组元 P 的动能的总和,即 $\Sigma m V_P^2$.

设 $\mathbf{F}_i$ 和 $\mathbf{F}_e$ 分别代表作用在 P 上的内合力和外合力，则可把动能定理写成:

$$\frac{1}{2}\Sigma m V_P^2(t_1) - \frac{1}{2}\Sigma m V_P^2(t_0) = \Sigma\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{F}_i(t) + \mathbf{F}_e(t)) \cdot \mathbf{V}_P(t)dt, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{V}_P(t)$ 表示 P 点在时刻 t 的速度.

(2),(3)和(4)式都是(1)式的推论. 事实上,(1)式包含了物质系统的全部动力学性质. 尽管如此，在某些简单的情形下,我们还将应用这些公式以减少一些证明.

3. 牛顿定律

牛顿的万有引力定律确定作用在物质系统上力的性质，而在一般力学的框架内,研究这个定律导出的结果,就构成了

1）法文本和英译本均作 $\sigma = 0$，有误，应为 $\frac{d\sigma}{dt} = 0$. ——译者注

天体力学领域．万有引力定律指出：质量为 m 和 m' 的两个质点 A 和 B 沿着两质点间的连线 AB 互相吸引，吸引力和它们的质量的乘积成正比，而和它们之间距离的平方成反比．

设 $AB = r$，作用在 B 上的力从 B 指向 A，其值为 $k(mm'/r^2)$．这里，k 是比例常数，称为万有引力常数，在厘米·克·秒制中，其实测值为 $6.670 \pm 0.005 \times 10^{-8}$ 达因·厘米²/克²．

在第 15 节中，我们将给出天文学家们所采用的单位系统中 k 的值．

按照向量的写法；牛顿万有引力定律可表示为：

A 对 B 的吸引力，$\mathbf{F}_B = kmm'\mathbf{BA}/r^3$

B 对 A 的吸引力，$\mathbf{F}_A = kmm'\mathbf{AB}/r^3$．

注意：牛顿定律含有引力通过空间瞬时传递的意思．

4. 牛顿定律的范围和局限

第一节介绍的关于力学定律的全部假说，与牛顿万有引力定律一起，形成了一组首尾一致的公理，它们的推论构成了牛顿力学；这些推论就是天体力学所研究的对象．即使不谈任何实际物理问题的应用，也可设想数学中应该有一个分支致力于这些问题的研究的．然而，值得考察一下，用这些公理来描述自然界的物理性质，究竟真实到什么样的程度？事实上，正因为长期的观测证实了这些假说的全部推论，所以，天体力学发表的著作才如此之多．在测量和计算的精度范围内，我们总能证实上述假说的物理真实性．像卫星和行星的运动、潮汐、地轴的进动、双星的运动、月球的天平动、地球的重力和彗星的运动等十分不同的现象，全都受天体力学理论的支配．这使得我们把牛顿定律当作万有引力定律．但在上述的各种运动中有一个是例外，这就是勒威耶首先在水星的运动中注

意到的．水星近日点(水星轨道上最接近太阳的点)的进动超过牛顿力学的预期值大约每百年 42″．此后，对金星、地球和火星也观测到类似的偏差，只是偏差值同观测误差的数量级相同；即使是水星的附加进动值，也比经典理论已预先算出的进动值小得多．因此，利用牛顿定律可得到很好的近似，虽然仍然需要微小的改正．

这就引起爱因斯坦对时间和空间的公理进行重大修改，他这样做的理由大都超出了天体力学的范畴．即使是概略地论述广义相对论，都要超出本书的目的．从根本上讲，相对论否认绝对时间和伽利略惯性坐标系的存在，假设引力以光的速度传播，并认为引力是由于物质的存在使时空连续统变形所引起的．但是，尽管有这样基本的差异，相对论在一阶近似下简化为牛顿力学；而考虑到测量的精度，除了上述的近日点的进动之外；在二阶近似中也可以略去同牛顿力学的差异．

这种情况的实际结果是我们可以继续应用牛顿力学的公理．应用牛顿力学的公理要比应用广义相对论的公理容易得多，并可以改正到广义相对论的二阶．很容易看出，改正量是很小的，而且由于用牛顿力学得到的简化的二体运动和真实运动只有很小的差异，我们可以简单地把这些相对论性改正加到牛顿力学所描述的运动中去．

今后，我们将采用已经介绍的牛顿力学的定律和假说；但要记住，在少数情况下，必须进行相对论性的小改正，这只有在某些行星理论中才有必要．

5. N 体问题

作为上述各点的例证，我们将考察 N 体问题，即寻求只受牛顿引力相互作用的 N 个质点的轨道问题．N 体问题迄今还远远没有解决，这个问题在于可以把太阳系中各种天体的运

动当成N体问题的特殊情况（小N）来处理，尽管太阳、行星和卫星是准球形而不是质点．在第五章我们将指出，如果天体之间两两的距离足够大，则假定每颗行星的质量都集中在行星的引力中心，把行星当成质点，可以高精度地计算出这些天体之间的相互吸引力．

同样，对于受遥远质点的引力作用的准球形行星P，利用引力中心运动定理，我们可以这样计算作用在行星的各质点上的力，即把行星的质量当成全部集中于行星的引力中心．

除了几个很靠近它们的主星的卫星之外，这些假设已被太阳系天体的运动所证实．因此，我们可以用太阳系天体的引力中心代替这些天体，而把它们的运动问题化成N体问题．

6. N体问题的方程

考察以O为原点的惯性参考系中，质量为m_i，坐标为(x_i, y_i, z_i)的N个质点P_i，$1 \leqslant i \leqslant N$．

设第j个质点P_j受其他$N-1$个质点$P_i(1 \leqslant i \leqslant N; i \neq j)$的引力吸引，作用在$P_j$上的合力为

$$\mathbf{F}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{k m_j m_i \mathbf{P}_j\mathbf{P}_i}{|P_jP_i|^3}. \tag{5}$$

力学基本定律在这里成为

$$m_j \frac{d^2\mathbf{OP}_j}{dt^2} = \mathbf{F}_j,$$

其中，$d^2\mathbf{OP}_j/dt^2$是质点P_j的加速度．消去m_j，得

$$\frac{d^2\mathbf{OP}_j}{dt^2} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{k m_i \mathbf{P}_j\mathbf{P}_i}{|P_jP_i|^3}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{6}$$

这样，我们得到N个表示质点轨道的向量微分方程．如果我们把这些向量方程都投影到三个坐标轴上去，则可获得

$3N$ 个二阶微分方程，形成一个 $6N$ 阶微分方程组：

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{N}\frac{km_j(x_i-x_j)}{[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2y_i}{dt^2}=\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{N}\frac{km_j(y_i-y_j)}{[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2z_i}{dt^2}=\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{N}\frac{km_j(z_i-z_j)}{[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{3/2}}$$

$$j=1,2,\cdots,N \qquad (7)$$

微分方程组 (7) 的解法构成天体力学中最重要的分支之一：太阳系动力学；N 体中的每一个点 P 代表太阳系中的一个天体.

7. N 体问题的积分

所谓 N 体问题微分方程组的一个积分是指 N 体的坐标、某些坐标的导数、还可能有时间的一个函数关系式；这种关系式对于任意时刻均满足微分方程组，并依赖于一个任意参数. 如果已知方程组的一个积分，则方程组降低一阶. 下面，我们将尝试寻求方程组 (7) 的积分.

(a) 把引力中心运动定理应用到整个 N 体系统：因为 N 体系统没有受到外力，其引力中心对惯性系作匀速直线运动. 引力中心 G 的坐标由下列向量关系式给出：

$$\mathbf{OG}=\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j\mathbf{OP}_j}{\Sigma m_j}.$$

令 $M=\Sigma m_j$ 表示 N 体系统的总质量.

引力中心 G 的加速度为零可表为

$$\frac{d^2\mathbf{OG}}{dt^2}=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N}m_j\frac{d^2\mathbf{OP}_j}{dt^2}=0.$$

上列求和式对 t 积分两次，得

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{OP}_j = \mathbf{A}t + \mathbf{B}.$$

其中，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是两个任意的向量. 取这个方程的坐标分量，一共有三个方程，每个方程依赖于两个任意参数（a_x, b_x 或 a_y, b_y 或 a_z, b_z）；这样，我们得到六个积分：

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} m_j x_j &= a_x t + b_x \\ \sum_{j=1}^{N} m_j y_j &= a_y t + b_y \\ \sum_{j=1}^{N} m_j z_j &= a_z t + b_z \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

(b) 把角动量定理应用到 N 体系统：因为 N 体系统没有受到外力，外力对于 O 点的力矩为零；所以，N 体系统对于 O 点的角动量的时间导数也为零，角动量为常数. 我们有

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{OP}_j \wedge m_j \frac{d\mathbf{OP}_j}{dt} = \mathbf{C}.$$

其中，$\mathbf{C}$ 是任意的常向量，其分量为（C_x, C_y, C_z）.

取这个方程的三个坐标分量，得

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(y_j \frac{dz_j}{dt} - z_j \frac{dy_j}{dt} \right) &= C_x \\ \sum_{j=1}^{N} m_j \left(z_j \frac{dx_j}{dt} - x_j \frac{dz_j}{dt} \right) &= C_y \\ \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x_j \frac{dy_j}{dt} - y_j \frac{dx_j}{dt} \right) &= C_z \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

这样，我们得到三个新的积分.

(c) 注意到如果我们令

$$U = k\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{m_i m_j}{[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{1/2}},\quad(10)$$

则对于一个给定的 h，有

$$\frac{\partial U}{\partial x_h} = k\sum_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{N}\frac{m_i m_h(x_i - x_h)}{[(x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2 + (z_h - z_i)^2]^{3/2}}.$$

以 h 代替 (7) 式中的 j，则和上式右端恒等. 因此，我们也可以把 (7) 式写成

$$m_j\frac{d^2x_j}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_j},\quad m_j\frac{d^2y_j}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_j},\quad m_j\frac{d^2z_j}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_j}.\quad(11)$$

由于 U 不显含时间，故有

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_j}\frac{dz_j}{dt}\right).$$

应用 (11) 式，上式成为

$$\frac{\partial U}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\left(m_j\frac{d^2x_j}{dt^2}\frac{dx_j}{dt} + m_j\frac{d^2y_j}{dt^2}\frac{dy_j}{dt} + m_j\frac{d^2z_j}{dt^2}\frac{dz_j}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}m_j\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_j}{dt}\right)^2\right].$$

积分上式，则得一个新积分. 事实上，从动能定理出发，也能得出这个积分:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}m_j\left[\left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_j}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_j}{dt}\right)^2\right] = U + h.$$

其中，h 是一个任意的常数.

这样，我们一共找到了方程组 (7) 的十个积分，容易证明它们是相互独立的. 邦加雷已证明，没有其他的单值解析积分.

应用上述 N 体问题积分的经典结果，可见它们使方程组降到 $6N-10$ 阶. 特别是著名的二体问题降到二阶. 下一章我们将看到，二体问题的二阶微分方程组是完全可积的.

第二章 二体问题

8. 二体问题的重要性

当我们比较作用在行星上的各种力的时候，我们发现，在相同的距离上，质量为M的太阳的吸引力比质量为m的行星的吸引力大$\frac{M}{m}$倍．表1给出主要行星的质量、离开太阳的距离和卫星数目．

从表1大致可以看到，对于所有的行星来说，由太阳产生

表 1*

名　称	离开太阳的平均距离（地球＝1）	质　量（太阳质量的百万分之一）	卫星数目
太　阳		10^6	
水　星	0.387	0.17	0
金　星	0.723	2.45	0
地　球	1.000	3.00	1[1]
火　星	1.524	0.32	2
小行星[2]	2—5.2	可忽略	
木　星	5.203	954.8	12
土　星	9.555	285.6	9和环
天王星	19.218	43.7	5
海王星	30.110	51.8	2
冥王星	39.600	2.7	0

1）应加上不断增加的许多人造卫星．

2）现已知1650颗，每年还发现一些新的小行星．

* 至今已编号的小行星已有二千多颗，照相巡天观测发现亮度大于照相星等21.2等的小行星达50万颗；已发现的卫星数目为木星（16），土星（23），冥王星（1），并发现了天王星环．——译者注

的平均作用力必定是占统治地位的．太阳至少比最大的行星重一千倍，同较小的行星相比还要重得多．如果我们忽略其他行星的吸引力作为一阶近似，则只要考虑太阳和所讨论的行星，就可以研究每颗行星的运动．所以，这是一个二体问题．而由其他行星的影响所引起的行星运动对二体运动的偏离是行星理论研究的对象，并在第七章中加以论述．

同样的近似对于围绕其主星运转的卫星运动也是有效的；虽然在这种情况下，摄动更为重要，因为太阳的距离虽然相对地远得多，但并不总能补偿其质量大的影响(第六章)．

二体问题的解常常满意地描述了物理的真实性，但是，二体问题的重要性主要不在于此．以后我们将看到，所有最完整的天体运动理论，都用二体问题的解(椭圆的情况)中出现的函数作为基本函数．二体问题的解构成太阳系动力学的基本运算——二体问题在天体力学中的重要性就在于此．

9. 二体的绝对运动和相对运动

在上一章第(6)式中，只保留 P_1 和 P_2 的坐标，就能得到二体运动方程．可以取二体的引力中心 G 作为惯性参考系的原点，因为引力中心运动定理告诉我们，引力中心没有加速运动．在这种情况下，方程为

$$\frac{d^2\mathbf{GP}_1}{dt^2}=\frac{km_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}{|P_2P_1|^3},\quad \frac{d^2\mathbf{GP}_2}{dt^2}=\frac{km_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1}{|P_2P_1|^3}. \tag{1}$$

从引力中心 G 的定义，有

$$m_1\mathbf{GP}_1+m_2\mathbf{GP}_2=0.$$

由此可得

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=-\frac{m_1+m_2}{m_2}\mathbf{GP}_1=\frac{m_1+m_2}{m_1}\mathbf{GP}_2. \tag{2}$$

代入(1)式，得

$$\frac{d^2\mathbf{GP}_1}{dt^2} = \frac{-km_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\mathbf{GP}_1}{|GP_1|^3},$$

$$\frac{d^2\mathbf{GP}_2}{dt^2} = \frac{-km_1^3\mathbf{GP}_2}{(m_1 + m_2)^2|GP_2|^3}.$$

结论：每个天体都受到引力中心方向的吸引，就好像引力中心聚积有质量 $M = \frac{m'^3}{(m + m')^2}$，$m$ 和 m' 是二体的质量.

实际上，二体的引力中心不能测量，测量必须相对于某质点进行．假设 P_1 是这种点，并设 P_2 运动的参考坐标系以 P_1 为原点，而坐标轴保持同惯性坐标系平行.

从 (1) 式和 (2) 式消去 $\mathbf{GP}_1$ 或 $\mathbf{GP}_2$，得

$$\frac{d^2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}{dt^2} = \frac{-k(m_1 + m_2)\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}{|P_1P_2|^3}. \qquad (3)$$

在二体问题中，一个天体相对于另一个天体（所参考的坐标轴平行于惯性参考系）的运动是这样的：其受力的情况相当于质量等于这两个天体的质量和的中心体对它的吸引.

从 (2) 式我们可以看出，绝对运动和相对运动是近似的，因此，在以后的讨论中，我们只论述相对运动.

10. 轨道的形式

根据牛顿定律，考察质量为 m 的质点 P 受质量为 M 的质点 A 的吸引．从上面的讨论得知，在以 A 为原点，而且平行于惯性参考系的坐标系中，引力为

$$F = \frac{-k(M + m)m}{r^2}.$$

令 $\mu = k(M + m)$，则 P 点的加速度为 $-\mu/r^2$

让我们把力学基本定理应用到二体运动：

(a) 角动量定理变成 $\mathbf{AP} \times \mathbf{V}_P = \boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\sigma}$ 为常向量（图

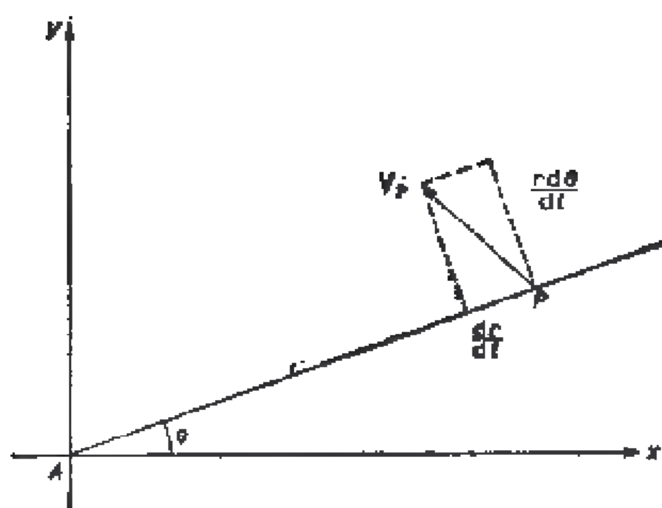


图 1

1). 从第二节我们知道，质点在一个平面内运动．令 r 和 θ 表示 P 点的极坐标，则 P 点的速度 $\mathbf{V}_P$ 的径向分量和横向分量[1]为 dr/dt 和 $rd\theta/dt$．

常向量 σ 的大小称为面积常数 C：

$$r\times\frac{rd\theta}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}=C. \tag{4}$$

(b) 动能定理的微分形式为

$$d\left(\frac{1}{2}mV^2\right)-\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}_P dt=0$$

或

$$\frac{1}{2}mV^2-\int\frac{-\mu m}{r^2}\frac{dr}{dt}dt=C',$$

其中，V 是 $\mathbf{V}_P$ 的大小，C' 是常数，而数量积 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}_P$ 已为 $\mathbf{F}$ 的大小和 $\mathbf{V}_P$ 在向径方向的投影的乘积所代替．因此，我们得到

$$\frac{1}{2}mV^2-\frac{\mu m}{r}=C'.$$

1) 原文为切向分量，采用"横向分量"较为确切．——译者注

最后，令 $h = C'/m$，h 称为能量常数，得

$$V^2 = 2h + \frac{2\mu}{r}. \tag{5}$$

(c) 从 (4) 式和 (5) 式消去 t，得

$$V^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{C^2(dr^2 + r^2 d\theta^2)}{r^4 d\theta^2}.$$

代入 (5) 式，得轨道的微分方程为

$$\frac{dr^2}{r^4 d\theta^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2\mu}{C^2 r} - \frac{2h}{C^2} = 0. \tag{6}$$

令 $u = \frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}$，得 $du = -\frac{dr}{r^2}$. 用这个新变量 u 表示，(6) 式成为

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \left(\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{2h}{C^2}\right) = 0.$$

令括弧中的量为 H^2，并假设它是正的（如果不是正的，将不存在实轨道），则

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = H^2 - u^2.$$

上式可立即积出，得 $u = H\cos(\theta - \theta_0)$，其中 θ_0 是任意常数. 再换成以向径表示，有

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2C^2 h}{\mu^2}}\cos(\theta - \theta_0)\right]. \tag{7}$$

这是以 A 为焦点的圆锥曲线方程.

(d) 令

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{C^2}{\mu} \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2C^2 h}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \frac{2hp}{\mu}} \\ v &= \theta - \theta_0 \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

由此

$$2h = \frac{\mu(e^2 - 1)}{p},$$

因此圆锥曲线的方程变成

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos v}{p}.$$

圆锥曲线的偏心率为 e，半通径为 p，半长径 a 由 $p = a(1 - e^2)$ 给出. 称为真近点角 v 的角度是从最接近 A 的点起量的，这点称为近点[1]. 令 $v = 0$，则可得 A 到近点的距离为 $a(1 - e)$. 在长轴上另一个轨道点是远点(或远地点，或远日点)，远点的距离为 $a(1 + e)$.

(e) 我们能够讨论这个圆锥曲线的性质. 从(8)式可见，根据 h 是否为负、零或正，可知圆锥曲线为椭圆、抛物线或双曲线的一个分枝. 如果 V_0 是起始时刻的速度，r_0 是起始时刻的向径，则由(5)式得

$$2h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}.$$

我们推得下列结论:

1. 如果 $V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} = V_P$ (称为抛物线速度) 则为抛物线轨道;

2. 如果 $V_0 > V_P$ 则为双曲线轨道;

3. 如果 $V_0 < V_P$ 则为椭圆轨道.

11. 克普勒定律

克普勒定律指出:

---

1) 大家知道，如果中心天体是地球，这点称为近地点；中心天体是太阳，称为近日点.

1. 行星在平面曲线上运动;在相等的时间间隔内,行星的向径所扫过的面积相等.

2. 行星的轨道是椭圆,太阳位于椭圆的一个焦点上.

3. 行星绕太阳公转周期的平方与行星轨道半长径的立方成正比.

在每个行星独立地绕太阳运动的假设下,我们已经证明了前两个定律.并且,第一定律是在任意的有心力场中角动量定理的推论.对于行星来说,能量常数 h 是负的.

第三定律证明如下:

椭圆的面积为 $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$. 设 P 为行星公转周期,则面积常数 C 为:

$$\frac{1}{2}\int_0^P C\,dt = \frac{CP}{2} = \pi a^2\sqrt{1-e^2},$$

$$C = \frac{2\pi}{P}a^2\sqrt{1-e^2}. \tag{9}$$

我们已经知道,$C^2 = p\mu = \mu a(1-e^2)$.

从最后两式消去 C,得

$$\frac{4\pi^2}{P^2}a^3 = \mu. \tag{10}$$

如果我们忽略行星的质量,则对每一个行星来说,$\mu = kM$ 都是相同的,第三定律得证.我们注意到,根据表 1 给出的行星真实的质量,就木星而言,这个定律在 0.1% 精确度以内是成立的.

12. 椭圆运动的研究

(a) 我们引进一个新的角度(图 2)来研究质点的椭圆运动 ($h < 0$),这个角度是时间的函数.令 O, F 和 P 分别代表椭圆的中心、焦点和近点.M 是椭圆上的一个点,它在 Fx 轴

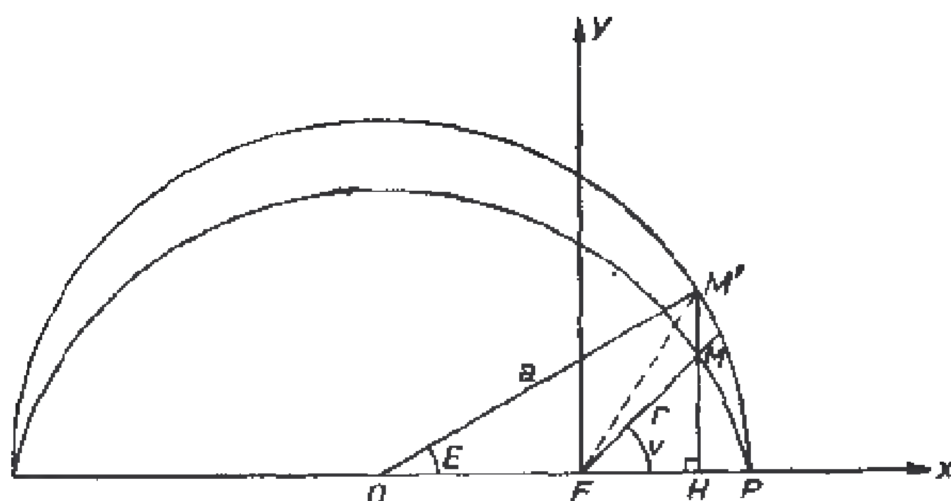


图 2

和 Fy 轴上的坐标为 $r\cos v$ 和 $r\sin v$. 令 M' 是半径 $OM'=a$ 的辅圆上的点，M' 在 Ox 轴上的投影和 M 一样都是 H，并与 M 在 Ox 的同一边，$E(\mathbf{OP}, \mathbf{OM'})$[1] 角称为偏近点角.

我们知道，椭圆是辅圆按比率为 $\sqrt{1-e^2}$ 的仿射变换，处处都有 $\overline{HM}=\sqrt{1-e^2}\,\overline{HM'}$. 由于 $\overline{OF}=ae$，我们可以用两种不同的方法计算 FM 在 Fx 轴和 Fy 轴上的投影：

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos v = a(\cos E - e) \\ y &= r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

由上式计算 r^2，可得

$$r = a(1 - e\cos E), \tag{12}$$

消去 r，得

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}.$$

而计算 $\operatorname{tg}^2\dfrac{v}{2}=\dfrac{(1-\cos v)}{(1+\cos v)}$，得

$$\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}=\frac{1-e\cos E-\cos E+e}{1-e\cos E+\cos E-e}$$

1) 常以 u 表示，E 是国际上推荐的符号.

$$= \frac{1+e}{1-e} \cdot \frac{1-\cos E}{1+\cos E} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}.$$

因为 v 和 E 在相同的半平面内，所以 $v/2$ 和 $E/2$ 处于同一象限，最后得

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \tag{13}$$

这就是真近点角和偏近点角的关系式.

(b) 第三种近点角叙述如下[1]:

平近点角定义为 $M = n(t - t_0)$. 其中，平均运动 $n = 2\pi/P$ (上面已经定义了周期 P)，t 是计算的时刻，而 t_0 是天体通过近点的时刻.

(c) 注意到从 (8) 式和 $p = a(1-e^2)$，得 $h = -\mu/2a$，采用符号 n，已经导出的标准公式变成:

角动量积分 (9)，$$C = r^2 \frac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2}; \tag{14}$$

能量积分 (5)，$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right); \tag{15}$$

克普勒第三定律(10)，$n^2a^3 = \mu$. (16)

(d) 现在我们可以研究 E 作为 t 的函数的变化.

在时间间隔 $t - t_0$ 内，向径扫过的面积是面积 PMF (图 2).

$$\text{面积}(PMF) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} C\,dt$$

$$= \frac{1}{2} na^2\sqrt{1-e^2}(t-t_0) = \frac{1}{2} a^2\sqrt{1-e^2}M,$$

M 和下面的 E 都假定以弧度表示.

---

1) 天体力学和天文学中所用的"近点角"一词表示，当天体通过近点时，此角为零；而"经度"一词则可从任意固定点起算.

应用椭圆和圆之间的仿射关系式，从面积 (PMF) 可以推出面积 $(PM'F)$:

$$面积\,(PM'F)=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,面积\,(PMF)=\frac{1}{2}a^2M.$$

但是

$$面积\,(PM'F)=面积\,(PM'O)-面积\,(FM'O).\qquad(17)$$

$PM'O$ 是面积为 $\frac{1}{2}a^2E$ 的扇形. $FM'O$ 是底 $FO=ae$，高 $HM'=a\sin E$ 的三角形. 因此，其面积为 $\frac{1}{2}a^2e\sin E$。把这些结果代入 (17) 式,得

$$\frac{1}{2}a^2M=\frac{1}{2}a^2E-\frac{1}{2}a^2e\sin E$$

或

$$E-e\sin E=M=n(t-t_0).\qquad(18)$$

这就是描述 E 和 t 之间关系的克普勒方程.

微分 (13) 式，把结果代入 (14) 式，借助于 (11) 式和 (12) 式消去 v 和 r，并进行积分，也可得到克普勒方程.

方程 (13) 和 (18) 把三种近点角互相联系在一起，并使我们可以计算出任意时刻的每一种近点角，从而应用(11)式，我们就可求得天体的坐标. 这就完整地解决了椭圆运动的问题.

13. 轨道根数

知道了 $r\sin v$ 和 $r\cos v$，一般还不足以确定天体在任意的坐标系中的空间位置. 因此，我们要定义一些惯用的参数以确定笛卡儿坐标系中的轨道.

我们将假设这些坐标轴的原点是中心天体（对于相对运动)或二体的引力中心(对于绝对运动). XOY 平面称为主平

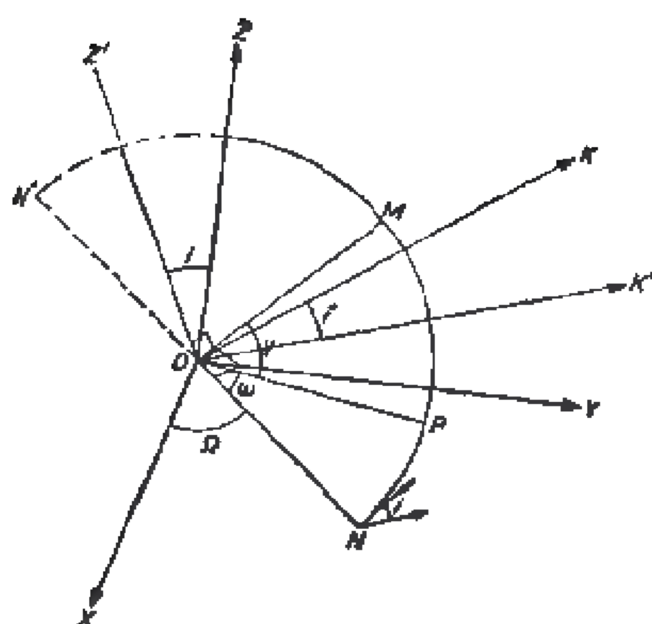


图 3

面(图 3)，其法线 **OZ** 是主平面的极方向．实际上，主平面或是地球赤道面，或是黄道面．

轨道面同主平面的交线是交点线，这条线交轨道于两点．在升交点 (N)，天体的 z 坐标递增．另一个交点就是降交点．Ω = (**OX**, **ON**) 确定了升交点的方向 **ON**；Ω 称为升交点经度，从 $0°$ 到 $360°$．

倾角 i 是主平面和轨道面之间的夹角，变化于 $0°$ 和 $180°$ 之间．如果天体的公转投影在主平面上的指向是顺行，则 $0° < i < 90°$；反之，如果是逆行，则 $90° < i < 180°$．

因此，Ω 和 i 确定了轨道平面，而 M 公转的指向就在这个平面内．

在轨道平面上的轨道是以 O 为焦点的圆锥曲线，其形状由偏心率 e 确定，而大小则由半长径 a [或在抛物线轨道的情况下，由半通径 $p = a(1 - e^2)$] 确定．对于双曲线，$a < 0$．

我们还必须确定圆锥曲线在轨道平面上的位置．确定了近点的方向 **OP**，就可以做到这一点．ω = (**ON**, **OP**) 角称

为近点角距，沿着运动的方向测量，并唯一地确定了轨道在轨道面上的位置.

最后，我们已经知道，真近点角 v 确定了天体 M 在轨道上的位置. 为了计算作为时间函数的真近点角，在确定了第六个根数 t_0（通过近点的时刻或历元）之后，求解克普勒方程.

六个根数 a，e，i，Ω，ω 和 t_0 唯一地确定了 M 在轨道上的运动（作为时间的函数）.

备注：

（1）常用近点经度 $\tilde{\omega}$ 代替近点角距 ω. 近点经度定义为 $\tilde{\omega}=\omega+\Omega$，它是不在同一平面的两个角度之和. 但是，如果 $i\to 0$，ON 变得不确定，因而 ω 和 Ω 也不确定，而 $\tilde{\omega}$ 则趋向于一个确定的极根.

（2）平均运动 n 不是第七个轨道根数，它是 a 的函数：$n^2a^3=\mu$.

14. 天体的笛卡儿坐标

我们来计算 OM 在 OX，OY 和 OZ 轴上的投影. M 相对于轨道平面上的 ON 和 OK 轴的坐标是 $r\cos(\omega+v)$ 和 $r\sin(\omega+v)$（图 3）.

把坐标轴绕 ON 旋转 $-i$ 角，M 相对于 ON，OK' 和 OZ 的坐标为

$$r\cos(\omega+v),\quad r\sin(\omega+v)\cos i,\quad r\sin(\omega+v)\sin i.$$

最后，再绕 OZ 轴旋转 $-\Omega$ 角，就可得到所要的坐标：

$$\left.\begin{aligned}X&=r[\cos(\omega+v)\cos\Omega-\sin(\omega+v)\sin\Omega\cos i]\\Y&=r[\cos(\omega+v)\sin\Omega+\sin(\omega+v)\cos\Omega\cos i]\\Z&=r\sin(\omega+v)\sin i\end{aligned}\right\}.\tag{19}$$

表 2 给出了 $r\sin v$ 和 $r\cos v$（双曲线和抛物线的情况只是作为参考，这里不加讨论）.

表 2

量	椭　　圆	双曲线	抛物线
$r\cos v$	$a(\cos E - e)$	$a(e - \operatorname{ch} F)$	$\frac{p}{2}(1 - s^2)$
$r\sin v$	$a\sqrt{1-e^2}\sin E$	$a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh} F$	ps
$t - t_0$	$\frac{1}{n}(E - e\sin E)$	$\frac{1}{n}(-F + e\operatorname{sh} F)$	$\frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{s}{2} + \frac{s^3}{6}\right)$

我们也可以提出相反的问题：已经观测到天体的不同的位置，怎样决定它的轨道根数？

如果我们知道天体的笛卡儿坐标，则只要两个位置就足以解决上面的问题．但是，通常天文观测没给出距离，而是给出方向．在这种情况下，至少需要三次观测．许多方法已用于解决这个问题，但是，介绍它们不是本书的范围，已有很多作者介绍了那些方法的原理[1]．

15. 太阳系的天文单位

确定轨道半长径的精度实质上取决于周期值和我们对 μ 值的了解程度．从(10)式，有

$$\frac{4\pi^2}{P^2}a^3 = \mu = k(M + m).$$

行星的观测得出高精度的 P 值（相对误差 10^{-8}—10^{-9}），如果我们取第三节给出的厘米·克·秒制的 k 值（只准到十进制三位数字），则将损失了观测的高精度．

因此，有关太阳系的所有计算均采用与厘米·克·秒制无关的单位进行．时间的单位保持相同，而所有行星的质量

1) 参看 Watson, *Theoretical Astronomy*, Dover 1964, and also Andoyer, and Danjon.

均以太阳的质量为单位表示 ($M = 1$). 这种单位表示的质量列在表 1 中. 最后,我们宁愿固定 k 的采用值,间接地定义长度的单位:

$$\sqrt{k} = 0.01720,20989,5000\cdots,$$
$$k = 0.00029,59122,08266\cdots.$$

这样,对于 $a = 1$, 质量可以忽略的行星的周期

$$P = 2\pi/\sqrt{k}.$$

若一个质量可以忽略的无摄行星绕太阳公转的周期为 365.2568983263 平太阳日, 则其轨道半长径就是长度的天文单位.

地球轨道半长径跟天文单位之差只有千万分之几.这样,这种长度单位将不受任何地球运动理论的改进的影响.

第三章　正则方程组

上一章我们已经解决了二体问题，现在我们来考察三体问题中出现的微分方程的某些性质．但是，在探讨这项工作之前，我们将把这些方程写成最方便的形式．

16. 在相对参考系中 N 体问题的方程

同二体问题一样，根据同样的理由，在研究N体系统（如太阳系）运动时，我们取N体当中的一个天体 P_1（例如太阳）作为坐标系的中心，坐标轴平行于惯性参考系．这样，方程组降低六阶．这等价于应用了引力中心定理的结果．因此，我们不再把这个定理应用于相对系统．

采用第一章的符号，天体 P_j 的坐标是

$$X_j = x_j - x_1,\quad Y_j = y_j - y_1,\quad Z_j = z_j - z_1.$$

同样，令

$$\Delta_{ij} = |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j|.$$

从第一章方程（7）对 P_j 和 P_1 两天体的方程逐项相减，得到 P_j 相对于 P_1 的运动方程：

$$\frac{d^2X_j}{dt^2} = -k(m_1+m_j)\frac{X_j}{\Delta_{j1}^3} + \sum_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{N} km_i\left(\frac{X_i-X_j}{\Delta_{ij}^3} - \frac{X_i}{\Delta_{1i}^3}\right),\quad i,j=2,3,\cdots,N. \tag{1}$$

Y 和 Z 的方程与此类似．

计算下面函数

$$V_j = \frac{k(m_1 + m_j)}{\Delta_{j1}}$$

$$+ \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{N} k m_i \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j}{\Delta_{i1}^3} \right) \qquad (2)$$

的偏导数可看出，方程组 (1) 简化成

$$\frac{d^2 X_j}{dt^2} = \frac{\partial V_j}{\partial X_j}, \quad \frac{d^2 Y_j}{dt^2} = \frac{\partial V_j}{\partial Y_j}, \quad \frac{d^2 Z_j}{dt^2} = \frac{\partial V_j}{\partial Z_j}. \qquad (3)$$

备注:

要注意同第七节结果的差异: 函数 V_j 的数目要比天体数目少一个，但是，每个 V_j 都比函数 U 简单.

17. 三体问题方程的简化

有一种坐标系兼有上述二种系统的优点: 每个天体的坐标以同该天体的位置无关的点为原点，而有唯一的函数 V. 我们将只对三体的情况定义这种坐标系，但是，其结果可以推广到N个天体.

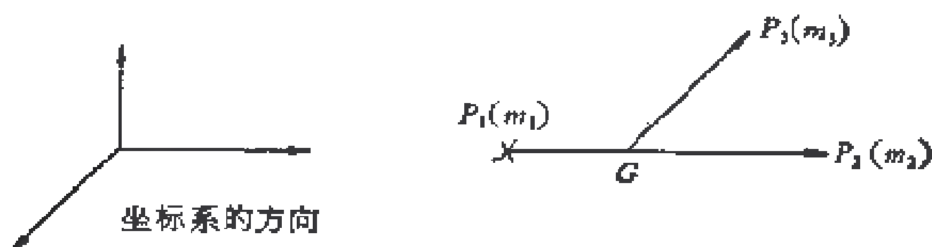


图 4

令 P_2 相对于 P_1 的坐标为 x, y, z ($x = X_2$ 等); P_3 相对于 P_1 和 P_2 的引力中心 G 的坐标为 x', y', z'; 这两组坐标轴保持平行(图 4)，则有

$$x' = X_3 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} X_2,$$

$$y' = Y_3 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} Y_2,$$

$$z' = Z_3 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} Z_2,$$

和

$$\Delta_{13}^2 = \Sigma\left(x' + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x\right)^2,$$

$$\Delta_{23}^2 = \Sigma\left(x' - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x\right)^2.$$

关于 P_2 的方程是

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-k(m_1 + m_2)x}{\Delta_{12}^3}$$

$$+ km_3\left[\frac{x' - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} x}{\Delta_{23}^3} - \frac{x' + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} x}{\Delta_{13}^3}\right], \quad (4)$$

y 和 z 的方程与此类似。

从 X_3, Y_3 和 Z_3 的方程出发,我们可以写出关于 x', y' 和 z' 相似的方程:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k(m_1 + m_3)\left(x' + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} x\right)}{\Delta_{13}^3}$$

$$- km_2\left[\frac{x' - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} x}{\Delta_{23}^3} + \frac{x}{\Delta_{12}^3}\right], \quad (5)$$

y' 和 z' 的方程与此类似.

对这两个方程逐项相减,可从第二个方程中消去 d^2x/dt^2.

可以看出,同上面的情况相似,如果我们令

$$V = k\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + k\frac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + k\frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}}, \quad (6)$$

则三体问题的方程成为

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3}\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{\partial V}{\partial x'}. \tag{7}$$

y, z 和 y', z' 四个方程与此类似.

18. 当一个天体的质量可忽略时的情况

被研究的天体的质量常常可以忽略. 例如，受木星摄动的小行星运动或受太阳摄动的卫星运动就是这种情况. 摄动体 P_3 的运动不受小天体 P_2 的影响. G 和 P_1 的位置相合. P_3 的运动只是简单地决定于 P_1 的作用——按照克普勒定律的运动.

因此，只要考察 X_2 的方程就足够了. 在这些条件下，不必进行上述的简化，考察 $j=1$ 和 $i=1$ 的方程 (3) 就行了，方程 (3) 变成

$$\frac{d^2X_2}{dt^2}=\frac{\partial V_2}{\partial X_2},\ \cdots,$$

$$V_2=\frac{k(m_1+m_2)}{\Delta_{12}}+km_3\left(\frac{1}{\Delta_{23}}-\frac{X_2X_3+Y_2Y_3+Z_2Z_3}{\Delta_{13}^3}\right). \tag{8}$$

19. 方程的正则形式

由(7)式和(8)式给出的方程组，和第一章(11)式一样，已写成了下列的形式:

$$m_j\frac{d^2x_j}{dt^2}=\frac{\partial V}{\partial x_j},\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

引入 n 个新变量 $y_j=m_j(dx_j/dt)$，并令

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j^2}{m_j},$$

得

$$\frac{\partial T}{\partial x_j}=0,\ \frac{\partial T}{\partial y_j}=\frac{x_j}{m_j},\ \frac{\partial V}{\partial y_j}=0.$$

我们可把 (9) 式写成 $2n$ 阶线性方程组:

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_j},\quad \frac{dy_j}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_j},\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{10}$$

其中, $F=T-V$.

这种形式的方程组称为正则方程组. 所有方程共有的函数 F, 称为哈密顿函数或特征函数,而 x_j 和 y_j 称为共轭变量. 这种方程非常重要,在天体力学、量子力学等学科的许多问题中都要遇到.

函数 F 是否是时间的显函数, 取决于某些摄动体的位置是否预先知道. 特别地,对于一体质量可以忽略的三体问题, 上一节指出正则方程组是六阶; V 通过 P_3 的已知位置成为 t 的函数.

20. F 不是 t 的函数的情况

上述结果已经表明正则方程组在天体力学中的重要性. 我们将研究这种方程组最常用的性质. 然而, 说明怎样能够消去 F 中显含的 t 是方便的.

考察 $2n$ 阶正则方程组:

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_j}(q_i,p_i,t),$$

$$\frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial q_j}(q_i,p_i,t),\quad 1\leqslant j,i\leqslant n. \tag{11}$$

如果 F 显含 t, 则 $\dfrac{\partial F}{\partial t}\neq 0$.

引入两个新变量 q_{n+1} 和 p_{n+1}: q_{n+1} 替换 F 中显含的变量 t, t 仍然作为独立的变量; 而 p_{n+1} 是与 q_{n+1} 共轭的变量. 哈密顿函数 F 不包含 p_{n+1}, 但是我们总是可以对 F 加上 p_{n+1} 的函数而不影响方程组 (11). 选择新的哈密顿函数, 使下列新方程组得到 $q_{n+1}=t$ 的解:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_j}{dt}&=\frac{\partial F^*(q_j,p_j,q_{n+1},p_{n+1})}{\partial p_j}\\ \frac{dp_j}{dt}&=-\frac{\partial F^*(q_j,p_j,q_{n+1},p_{n+1})}{\partial q_j}\\ &j=1,2,\cdots,n,n+1\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

为此，我们必须取 $F^*=F+p_{n+1}$. 最后的两个方程变成

$$\frac{dq_{n+1}}{dt}=\frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_{n+1}}=1,$$

$$\frac{dp_{n+1}}{dt}=-\frac{\partial F^*}{\partial q_{n+1}}=-\left(\frac{\partial F^*}{\partial t}\right)_{t=q_{n+1}}.$$

这样，我们已经把原来的方程组化成另一个 $2n+2$ 阶的正则方程组，其特征函数 F^* 不再包含 t. 这种新的方程组更普遍些：它包含了第一组方程的解，只要用 t 取代 q_{n+1} 并略去 p_{n+1} 就行了.

21. 正则方程组的积分

让我们一开始就假设，我们有特征函数 F 不依赖于 t 的 $2n$ 阶正则方程组：

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial F(q_i,p_i)}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial F(q_i,p_i)}{\partial q_j},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.\tag{13}$$

由于 F 不是 t 的显函数，故其全微商为

$$\frac{dF}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt}+\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt}\right).$$

如果我们用方程组的解代替上式中 $2n$ 个函数 q_j 和 p_j，则得

$$\frac{dF}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial F}{\partial q_j}\right)=0.$$

这个方程可积出，对于任一组解 $q_i(t)$ 和 $p_i(t)$，等式

$$F(q_i, p_i) = C$$

都成立．因此，上式是方程 (13) 的一个积分．

实际上，F 的偏导数也不依赖于时间 t，t 只是以微分 dt 的形式出现，故可把它消去．例如，选择 q_n 作为新的独立变量，把方程组 (13) 写成下列形式：

$$\frac{dq_j}{dq_n} = \frac{\partial F/\partial p_j}{\partial F/\partial p_n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1;$$

$$\frac{dp_j}{dq_n} = -\frac{\partial F/\partial q_j}{\partial F/\partial p_n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

这是具有积分 $F = C$ 的 $2n-1$ 阶方程组．如果我们得到这个方程组的一个解，它是 q_n 的函数，则从下列积分，可以得到 t，

$$t - t_0 = \int \frac{dq_n}{\partial F/\partial p_n}, \tag{14}$$

因为上式右端只是 q_n 的函数．

这样，方程组降为 $2n-2$ 阶正则方程组，其哈密顿函数依赖于独立变量 q_n 和一个积分． 天体力学中普遍使用的方法很少用到这个性质，比较常用的是上节阐明的相反的性质，即可从特征函数中消去 t．

把这个方法应用到 $2n+2$ 阶正则方程组(其特征函数为第 20 节中的 F^*)，得出积分 $F^* = C$，而方程 (14) 简化为 $dt = dq_{n+1}$，因为 $\partial F^*/\partial p_{n+1} = 1$．

我们回到不带附加信息的初始方程组的讨论，因为积分 $F^* = C$ 是附加变量 p_{n+1} 的函数．

22. 变量的正则变换

变量的变换是解天体力学方程最常用的方法之一．当方

程写成正则形式时，我们将要介绍的方法表明是特别有效的．方法实质上是把变量 p_i，$q_i(1 \leqslant i \leqslant N)$ 变换成新变量 P_i，$Q_i(1 \leqslant i \leqslant N)$，使得用这些新变量写成的方程更为简单．另外，如果新的方程组是正则的，则我们认为变量的变换是正则变换．如果成功地找到了这种变换，我们能够继续这个过程，直到方程组容易积出为止(例如，参看第 5 章)．

现在，我们来寻求正则变换的充要条件．

A．必要条件

考察微分方程组 (13)：

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F(q_i, p_i)}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F(q_i, p_i)}{\partial q_i}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N.$$

其中，F 不显含 t，并设 $2N$ 个新变量 P_j，$Q_j(1 \leqslant j \leqslant N)$ 也是正则的．

考察下列的量．

$$d\theta = \sum_i p_i dq_i - F dt. \tag{15}$$

对于所有的 i 值，有 $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}$；而且，由于 p_i 是解，所以它仅仅依赖于 t．因此，我们也可以写出

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}. \tag{16}$$

我们知道，$\Sigma X_i dx_i$ 为全微分的必要和充分的条件是$(\partial X_i/\partial x_k - \partial X_k/\partial x_i)$ 为零．

将这个条件用到 (15) 式右端，要记住只有 F 依赖于 q_i，而 p_i 只依赖于 t，得

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0,$$

即方程组 (16).

因此，$\sum_i p_i dq_i - F dt$ 是全微分.

我们可以把同样的道理应用到新的正则方程组:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial F^*(P_i, Q_i)}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial F^*(P_i, Q_i)}{\partial Q_i}.$$

新的哈密顿函数 F^* 不需要跟 F 恒等. 这里，$\Sigma P_i dQ_i - F^* dt = d\theta^*$ 又是全微分. 逐项相减可见，变量的变换是正则的必要条件是

$$\sum_i P_i dQ_i - \sum_i p_i dq_i = d(\theta^* - \theta) + (F^* - F)dt.$$

令

$$K = F^* - F,$$

上式变成

$$\sum_i P_i dQ_i - \sum_i p_i dq_i - K dt = dW. \tag{17}$$

其中，K 是变量的函数，dW 是一个全微分.

B. 充分条件

我们将要指出，条件 (17) 也是充分的.

由于初始方程组是正则的，所以

$$\sum_i p_i dq_i - F dt = d\theta.$$

把上式代入 (17) 式，得

$$\sum_i P_i dQ_i - (F + K)dt = d(W + \theta). \tag{18}$$

上式右端是全微分，所以，左端也是全微分. 全微分的条件为

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = -\frac{\partial(F + K)}{\partial Q_i}.$$

由于我们假设 P_i 是只依赖于 t 的变量，故得

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial(F+K)}{\partial Q_i}. \tag{19}$$

但是，我们也知道 $\sum_i P_iQ_i$ 的全微分是

$$d\left(\sum_i P_iQ_i\right) = \Sigma P_i dQ_i + \Sigma Q_i dP_i.$$

方程 (18) 可写成

$$d\left(\sum_i P_iQ_i\right) - \Sigma Q_i dP_i - (F+K)dt = d(W+\theta)$$

或

$$\Sigma Q_i dP_i + (F+K)dt = d\left(\sum_i P_iQ_i - W - \theta\right).$$

上式左端又必定是全微分．如前所述，我们知道这意味着

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial(F+K)}{\partial P_i}. \tag{20}$$

方程式 (19) 和 (20) 表明，P_i 和 Q_i 的方程组是正则的，其哈密顿函数为 $F+K$.

结论：我们已经指出，条件 (17)

$$\sum_i P_i dQ_i - \sum_i p_i dq_i - K dt = dW$$

是变量从 p_i，q_i 变到 P_i，Q_i 为正则变换的必要和充分条件，新的特征函数是 $F+K$，不管哈密顿函数是否显含 t 都是成立的．

备注：

(17) 式表示的 $(p_i, q_i) \to (P_i, Q_i)$ 变换称为接触变换，在偏微分方程理论中，它起着重要的作用．但是，在这里并没有用到它的经典性质．

23. 正则变换的实例

A. 利用母函数进行变量变换

考察一个完全普遍的正则方程组:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial q_i},\quad 1\leqslant j\leqslant N. \tag{21}$$

定义变量的变换 $(q_i, p_i)\to(Q_i, P_i)$ 如下. 我们给出 $2N$ 个变量的任意函数 S,称为母函数,它是新变量 Q_i 和老变量 p_i 的函数,记为 $S(Q_i, p_i)$, $1\leqslant j\leqslant N$.

由下列 $2N$ 个隐函数形式的方程定义变量的变换:

$$q_i=\frac{\partial S}{\partial p_i},\quad P_i=\frac{\partial S}{\partial Q_i}. \tag{22}$$

我们将证明,对于任何 S,变量的变换都是正则的,而特征函数也保持不变.

考察下列的量:

$$E=\sum_i(P_i dQ_i-p_i dq_i).$$

微分 $S(Q_i, p_i)$ 给出下列恒等式:

$$dS=\sum_i\frac{\partial S}{\partial Q_i}dQ_i+\sum_i\frac{\partial S}{\partial p_i}dp_i.$$

或者按照(22)式 P_i 和 q_i 的定义,有

$$dS=\sum_i P_i dQ_i+\sum_i q_i dp_i, \tag{23}$$

故得

$$E=dS-\sum_i q_i dp_i-\sum_i p_i dq_i=d\left[S-\sum_i p_i q_i\right].$$

这是全微分,满足(17)式条件,并有 $K=0$(哈密顿函数不变)和 $W=S-\Sigma p_i q_i$.

B. Q_i 的共轭变量

考察正则变量 x_j, y_j 的方程组. 设我们希望进行这样的

正则变换：保持哈密顿函数不变，而且 q_i 是 x_i 的已给定的函数，关系式 (17) 给出

$$\sum_j y_j dx_j - \sum_j p_j dq_j = dW. \tag{24}$$

因为 x_j 是 q_i 的函数，故得

$$dx_j = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial q_i} dq_i, \quad i, j = 1, 2 \cdots, n.$$

如果我们事先令 $dW = 0$，若取

$$p_i = \sum_j y_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{25}$$

则恒等地满足 (24) 式.

现在，如果 T 具有第 19 节以 x 表示的形式：

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}\right)^2,$$

则有

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_j m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{dx_j}{dt} = \sum_j y_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}.$$

其中，$q_i' = (dq_i/dt)$.

因此，同 (25) 式右端相比较得到

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}.$$

这里的 T 已经写成为 q_i 和 q_i' 的函数.

24. 雅哥比定理

现在我们将建立一个定理，并用来定义一组对于二体问题很重要的正则变量.

我们寻求一种使新哈密顿函数为 0 的正则变换.

对于正则方程组，有

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

我们建立 $(p_i, q_i) \to (P_i, Q_i)$ 的正则变换，使得

$$\sum_i P_i dQ_i - \sum_i p_i dq_i + F\,dt = -dW \tag{26}$$

（为了简化以后的符号，我们把上式的右端写成 $-dW$）。由于 F 不为零，所以 W 是 t 的函数。

令 $(N+1)$ 个微分系数逐项相等，有

$$P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i}, \quad p_i = +\frac{\partial W}{\partial q_i},$$

$$F(q_i, p_i, t) = -\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{27}$$

在最后的方程中，以 $\partial W/\partial q_i$ 代替 p_i，得

$$F\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \tag{28}$$

这就是雅哥比方程式。

假设已经进行了变量的变换，新哈密顿函数是 $F - F = 0$，方程变成

$$\frac{dP_i}{dt} = 0, \quad \frac{dQ_i}{dt} = 0;$$

或

$$P_i = \beta_i, \quad Q_i = \alpha_i.$$

这里，α_i 和 β_i 是常数。因此，如果我们能够找到这种特别的变换，问题就解决了。

假设我们已经求得（28）式的一个解，它依赖于 N 个"独立的"任意常数 a_i[1]，N 个 q_i 和 t：

$$W(q_i, a_i, t) = 0.$$

我们建立这种正则变换，使常数 a_i 是新变量 Q_i 的解。方程组（27）的第一列确定了共轭变量 P_i：

1）原文为"线性无关的"，有误。

$$P_j = b_j = -\frac{\partial W(q_j, a_j, t)}{\partial a_j}. \qquad (29)$$

b_j 是 P_j 取为解的常数. 利用 (29) 式的 N 个关系式就能定出 N 个变量 q_j, 它是 $2N$ 个积分常数 a_j, b_j 和 t 的函数. 如果每个 q_j 均出现在 N 个方程的每一个之中, 则这是成立的; 这个条件防止某个 a_j, 例如 a_N, 是可加常数, 即 W 具有

$$W(q_j, a_1, \cdots, a_{N-1}, t) + a_N$$

的形式. 然后, 我们把 q_j 的值代入方程组 (27) 的第二列

$$p_j = \partial W(q_j, a_j, t)/\partial q_j$$

中, 就可获得 N 个变量 p_j, 它是 a_j, b_j 和 t 的函数.

雅哥比定理可以概述于下:

为了得到 $2N$ 阶正则方程组,

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_j}$$

的积分, 我们寻求雅哥比方程

$$F\left(q_j, \frac{\partial W}{\partial q_j}, t\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

的一个完全解, 这个解依赖于 N 个独立的任意常数 a_j. 然后, 解下列方程组求得 q_j 和 p_j:

$$b_j = -\frac{\partial W(q_j, a_j, t)}{\partial a_j}, \quad p_j = \frac{\partial W(q_j, a_j, t)}{\partial q_j}.$$

其中, N 个 b_j 是另外的 N 个积分常数.

备注:

可以把一个积分常数(如 a_N) 引进雅哥比方程, 把雅哥比方程写成

$$F\left(q_j, \frac{\partial W}{\partial q_j}, t\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = a_N.$$

这等于在 (26) 式两端都加上 $a_N dt$. 显然, 除了哈密顿函

数不再为零而是等于 a_N 即 Q_N 之外，并不改变正则变换的条件.

25. 二体问题的正则方程组

我们将把雅哥比定理应用到二体问题的椭圆情形. 实际上，在第二章我们已经求出基本解. 现在的讨论是对以前的补充，指出轨道根数如何形成一组正则共轭变量.

我们可以把第 18 节的结果应用到二体问题，方程组(10)除以 m_j 后，可得一个天体的运动方程为

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_j},\quad \frac{dy_j}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_j},\quad j=1,2,3.$$

其中，x_1, x_2, x_3 是该天体的笛卡儿坐标，而

$$F=T-V=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-\frac{\mu}{r}$$

仅仅保留 V 的第一项.

把这些方程用球极坐标写出(见图 5)，得

$$x=r\cos\varphi\cos\theta,\quad y=r\cos\varphi\sin\theta,\quad z=r\sin\varphi.$$

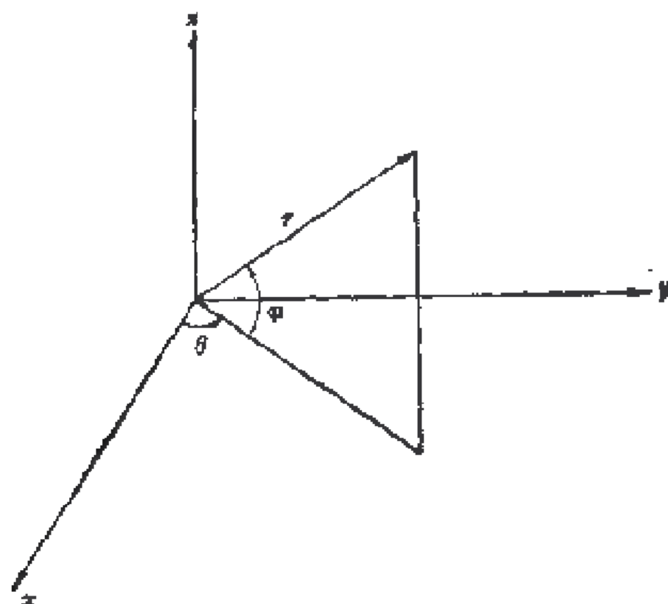


图 5

以这些坐标表示 F，易得

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+r^2\cos^2\varphi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

取变量

$$q_1=r,\ q_2=\varphi,\ q_3=\theta, \tag{30}$$

并令 q_1'，q_2' 和 q_3' 是它们的导数 dr/dt，$d\varphi/dt$ 和 $d\theta/dt$，用这种符号表示有

$$T=\frac{1}{2}q_1'^2+\frac{1}{2}q_1^2q_2'^2+\frac{1}{2}q_1^2q_3'^2\cos^2 q_2.$$

我们寻求对 q_i 共轭的变量，根据第 23 节末尾的结果，有

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial q_1'}=q_1',\ p_2=\frac{\partial T}{\partial q_2'}=q_1^2q_2',$$
$$p_3=\frac{\partial T}{\partial q_3'}=q_1^2q_3'\cos^2 q_2. \tag{31}$$

采用这些新变量，特征函数 F 成为

$$F=\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2q_1^2}p_2^2+\frac{1}{2q_1^2\cos^2 q_2}p_3^2-\frac{\mu}{q_1};$$

而正则方程组为

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial q_i},\quad i=1,2,3.$$

26. 雅哥比定理对二体问题的应用

采用上面写出的特征函数 F，把雅哥比定理应用到二体问题. 由于 F 不依赖于 t，所以 $F=h$ 是方程组的积分，h 是常数（参看第 21 节）. 这个积分和第 10 节的动能积分 (5) 恒等.

F 完全可以用 $F-h$ 代替而方程不会改变. 在雅哥比

方程中，我们也将以 $F-h$ 代替 F. 这样，一开始就引进了一个任意常数(参看第 24 节的备注)。

因此，雅哥比方程为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\frac{1}{2q_1^2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2q_1^2\cos^2 q_2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2-\frac{\mu}{q_1}-h=0. \qquad (32)$$

注意，我们要的不是这个方程的完全解，而仅仅是依赖于三个任意常数的解. 由于方程中导数是能分离的，我们可以寻求一个也能分离变量的解 W，即寻求下列形式的 W:

$$W=W_1(q_1)+W_2(q_2)+W_3(q_3). \qquad (33)$$

因此，雅哥比方程为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2+\frac{1}{2q_1^2}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2q_1^2\cos^2 q_2}\left(\frac{dW_3}{dq_3}\right)^2-\frac{\mu}{q_1}-h=0.$$

因为三个括弧中的量是独立的，因此，如果我们选取下列三个方程，则可满足上面的方程:

$$\frac{dW_3}{dq_3}=a_3,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2+\frac{a_3^2}{2\cos^2 q_2}=\frac{a_2^2}{2},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2+\frac{a_2^2}{2q_1^2}-\frac{\mu}{q_1}-h=0.$$

直接代入可看出雅哥比方程的左边恒等于零. 因此，从(33)式得

$$W=\int\left(2h+\frac{2\mu}{q_1}-\frac{a_2^2}{q_1^2}\right)^{1/2}dq_1$$

$$+\int\left(a_2^2-\frac{a_3^2}{\cos^2 q_2}\right)^{1/2}dq_2+\int a_3dq_3. \qquad (34)$$

这是(32)式的一个解，并含有不定积分的附加常数;这个解依赖于三个任意常数 a_3, a_2 和 h, 我们令 h 为 a_1, 注意，在这个阶段,没有必要确定平方根的符号.

27. 常数 a 的意义

在第 24 节中我们已经说明,出现在 W 中的积分常数 a_1, a_2 和 a_3 是新变量 Q_1, Q_2 和 Q_3 的假设值，而这些新变量是属于与初始方程组等价的正则方程组的,其特征函数恒等于零.

解的形式为

$$Q_1=a_1, \quad Q_2=a_2, \quad Q_3=a_3.$$

我们来找出这三个正则变量在椭圆运动中的意义.

(1) a_1 就是所谓的动能积分常数 h. 从第 12 节,有

$$h=\frac{-\mu}{2a},$$

其中 a 是半长径.

(2) 考察正则变换的基本方程:

$$\sum_i P_i dQ_i-\sum_i p_i dq_i+Fdt=-dW. \qquad (35)$$

从(34)式可见, W 只是通过下式依赖于 q_3:

$$\int a_3dq_3=a_3q_3.$$

因此, dW 含 dq_3 的唯一的项是 a_3dq_3, 使其同(35)式中 dq_3 的项相等,得

$$-p_3=-a_3$$

或

$$a_3=q_1^2\cos^2 q_2 q_3'=r^2\cos^2\varphi\frac{d\theta}{dt}.$$

这是角动量的 z 分量. 从第 12 节 (14) 式可看出，角动量的大小为

$$C = na^2\sqrt{1-e^2} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}.$$

角动量在 Oz 上的投影是 $\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i$，故得

$$a_3 = Q_3 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i.$$

(3) 同样地，可以令 $-p_2$ 与 dW 全微分式中 dq_2 的系数相等. 这里，又只有 q_2 和 dq_2 出现在 dW_2 中，由此可得

$$-p_2 = -\sqrt{a_2^2 - \frac{a_3^2}{\cos^2 q_2}} = -\sqrt{a_2^2 - \frac{a_3^2}{\cos^2 \varphi}}.$$

用上面求得的 $r^2\cos^2\varphi(d\theta/dt)$ 代替 a_3，得

$$p_2 = \sqrt{a_2^2 - r^4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos^2\varphi}.$$

此外

$$p_2 = q_1^2 q_2' = r^2\frac{d\varphi}{dt},$$

故得

$$a_2^2 = r^4\left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos^2\varphi\right].$$

这是天体对于 O 点的角动量的平方. 由此可得

$$Q_2 = a_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}.$$

28. Q_i 的共轭变量

根据雅哥比定理，变量 P_i 设为由 $b_i = -\partial W/\partial a_i$ 确定的常数值，其中 W 由 (34) 式给出. 但是，我们应该确定函数 W，因为如前所述，只有当任意常数和积分号确定之后，W 才能确定. 对任意常数和积分号的另一种选择将得出不同的、等效的另一组变量 P_i.

我们取

$$W=\int_{q_1(t_0)}^{q_1(t)}\varepsilon_1\left(2a_1+\frac{2\mu}{q_1}-\frac{a_2^2}{q_1^2}\right)^{1/2}dq_1$$
$$+\int_0^{\varphi}\varepsilon_2\left(a_2^2-\frac{a_3^2}{\cos^2 q_2}\right)^{1/2}dq_2+\int_0^{\theta}a_3dq_3.$$

其中，t_0 是通过近点的时刻．如果 $q_1=r$ 在增大，取 $\varepsilon_1=+1$；若 r 在减小，$\varepsilon=-1$．这样的规定使得第一个积分号下函数的导数连续．对应于通过远点和近点的 q 值，$\varepsilon_1=0$（参看下面的(1)）．同样地选择 ε_2，使得第二个积分号下的量具有连续的导数．当 $q_2=\varphi=i$ 时，出现不连续．因此，当 φ 增加时，或当离升交点距离 $\omega+v=\phi$ 处于 $-\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间而有 $\cos\phi>0$ 时，取 $\varepsilon_2=+1$（图 6）．同样地，如果 $\cos\phi<0$，取 $\varepsilon_2=-1$．



图 6

(1) Q_1 的共轭变量由下式给出：

$$P_1=-\frac{\partial W}{\partial a_1}=-\int_{q_1(t_0)}^{q_1(t)}\varepsilon_1\left(2a_1+\frac{2\mu}{q_1}-\frac{a_2^2}{q_1^2}\right)^{-1/2}dq_1.$$

现在，q_1 就是 r，$a_1=h=-\mu/2a$，而 $a_2^2=\mu a(1-e^2)$．分子和分母都乘上 $r(>0)$，即可得

$$P_1 = -\varepsilon_1 \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{r\,dr}{\sqrt{-(\mu/a)r^2 + 2\mu r - \mu a(1-e^2)}}.$$

为了实现积分，我们把这些量用偏近点角来表示．我们知道，对此有 $r = a(1 - e\cos E)$，$dr = ae\sin E dE$（参看第二章(12)式）．

设 E 是 t 时刻的偏近点角，根据假设，在 t_0 时 E 为零，

$$P_1 = -\int_0^E \frac{\varepsilon_1 a(1 - e\cos E)ae\sin E dE}{\sqrt{\mu a}\,[-(1-e\cos E)^2 + 2(1-e\cos E) - 1 + e^2]^{1/2}},$$

$$P_1 = -\varepsilon_1 \int_0^E \frac{a^2(1 - e\cos E)e\sin E dE}{\sqrt{\mu a}\; e|\sin E|}.$$

从 ε_1 的定义，得

$$\varepsilon_1 \frac{\sin E}{|\sin E|} = +1.$$

因此，如上所述，通过近点时

$$\left(2\alpha_1 + \frac{2\mu}{q_1} - \frac{\alpha_2^2}{q_1^2}\right)^{1/2} = \frac{|\sin E|}{r}$$

为零．因此，根据克普勒定律有

$$P_1 = -\int_0^E \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}(1 - e\cos E)dE$$

$$= \frac{-1}{n}(E - e\sin E) = -(t - t_0).$$

从第 24 节的备注得知，最后的哈密顿函数就是 $h(=Q_1)$．给出 P_1 的方程是

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial Q_1} = -1,$$

积出得 $P_1 = -t + b_1$．因此，积分常数 b_1 就是经过近日点的时刻 t_0．

(2) 同样的计算给出 $P_3 = -\Omega$ 和 $P_2 = -\omega$．这里，在

确定符号和积分限时，我们必须同样小心. Ω 和 ω 分别为升交点的经度和近地点的角距[1].

29. 上节的结果对普遍问题的应用

这样,我们已经建立了一组新的共轭变量:

$$Q_1 = -\frac{\mu}{2a},\ Q_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)},\ Q_3 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i;$$

$$P_1 = -t + t_0,\ P_2 = -\omega,\ P_3 = -\Omega. \tag{36}$$

对于二体问题,其特征函数简化为 $Q_1 = -\mu/2a$.

采用合适的正则变换,我们可使哈密顿函数为零;但是,对于其他的计算,这种新变换不是合乎需要的.

现在,考察像出现在三体问题(第 17 节)中那样的普遍情况. 我们只考察其中一个天体的方程. 显然,以下的方程可推广到其他的天体.

我们已经得到的方程组是(方程 10)

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_j},\ \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_j},\quad j = 1, 2, 3. \tag{37}$$

这里,$F = T - V$, 而正如我们已经看到的,V 含有 μ/r 项. 令

$$V = \frac{\mu}{r} + R,$$

R 称为摄动函数. 在哈密顿函数 $F = \left(T - \frac{\mu}{r}\right) - R$ 中,R 包括全部所研究的运动的非二体问题.

$F^* = T - \mu/r$ 是二体问题的哈密顿函数,我们刚刚讨论过.

方程组 (37) 变成

---

1) 本节"近点"、"近日点"和"近地点"混同,如不指具体对象,统一采用"近点"似较妥当. ——译者注

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial(F^*-R)}{\partial y_j},\quad \frac{dy_j}{dt}=-\frac{\partial(F^*-R)}{\partial x_j}.$$

现在，我们对这组变量进行变换，使新变量是方程组(36)所定义的量 $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$. 方程组 (37) 不全同于第 27 节的二体系统，而由于它有不同的解，解中的新变量将不再是常数. 在运动的研究中，我们称这些新变量为密切量；对于二体问题，唯一的作用力是中心力 μ/r，密切量就代表运动的根数. 当然，密切根数是在与讨论的天体有关的坐标系 x_1, x_2, x_3 中定义的.

变量的这种改变是使新哈密顿函数 F_1 为

$$F_1=F-\left(F^*+\frac{\mu}{2a}\right)=-R-\frac{\mu}{2a},$$

因为这个变换已把哈密顿函数 F^* 化为 $Q_1=-\mu/2a$.

因此，方程组 (37) 等价于下列方程组：

$$\frac{dQ_j}{dt}=\frac{\partial(-R-(\mu/2a))}{\partial P_j},$$

$$\frac{dP_j}{dt}=-\frac{\partial(-R-(\mu/2a))}{\partial Q_j},\quad j=1,2,3. \tag{38}$$

改变哈密顿函数中所有的符号，并令 $P'_j=-P_j$，可以改进这个方程组的形式：

$$P'_1=t-t_0,\ P'_2=\omega,\ P'_3=\Omega. \tag{39}$$

因此得下列方程组：

$$\frac{dQ_j}{dt}=+\frac{\partial(R+(\mu/2a))}{\partial P'_j},$$

$$\frac{dP'_j}{dt}=-\frac{\partial(R+(\mu/2a))}{\partial Q_j}. \tag{40}$$

30. 德洛勒变量

现在，变量 P'_2 和 P'_3 代表两个经典的椭圆根数. 我们可以

尝试对 P_1' 进行一些变换，使它代表平近点角．经过这种变换后得到的六个新正则变量以 L，G，H，l，g 和 h 表示．在进行变换时，使特征函数保持不变，而且 P_2' 和 P_3' 必须分别等于 g 和 h．

变换为正则的而哈密顿函数保持不变的条件是

$$ldL + gdG + hdH - P_1'dQ_1 - P_2'dQ_2 - P_3'dQ_3 = dW,$$

要求有

$$P_2' = g,\ P_3' = h \quad 和 \quad l = n(t - t_0) = nP_1' = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2} P_1'.$$

如果下列各式成立，上述条件可得到满足：

$$Q_2 = G,\ Q_3 = H,$$

和

$$ldL - P_1'dQ_1 = dW,$$

$$\sqrt{\mu}\, a^{-3/2} P_1' dL - P_1' d\left(\frac{-\mu}{2a}\right) = dW,$$

$$P_1'\left(\sqrt{\mu}\, a^{-3/2} dL - \frac{\mu da}{2a^2}\right) = dW.$$

一个可能的解是 $dW = 0$．因此，

$$\frac{\sqrt{\mu}\, da}{2\sqrt{a}} = dL,$$

所以

$$L = \sqrt{\mu a}.$$

因此，如果我们再令

$$\phi = \frac{\mu}{2a} + R = \frac{\mu^2}{2L^2} + R,$$

则方程组（37）等价于下列方程组：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial h} \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial\phi}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial\phi}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial\phi}{\partial H} \end{aligned}\right\}. \quad (41)$$

这样，我们必须把 ϕ 表为变量 L, G, H, l, g 和 h 的函数，这些变量和椭圆根数的关系为

$$L = \sqrt{\mu a}, \quad G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i,$$
$$l = M = n(t - t_0), \quad g = \omega, \quad h = \Omega. \qquad (42)$$

这组称为德洛纳变量的正则变量，在月球理论的发展中非常重要，而且仍然是用于摄动问题最有效的变量组之一，在第 5 章中我们特别要用到它.

31. 密切根数

从第 8 节我们已经看到，一般说采用椭圆运动描述太阳系中观测到的实际运动是恰当的近似. 因此，如果从 t_0 时刻开始，略去所有的摄动力，则天体的运动将是精确的椭圆运动. 在一定的时间内，椭圆运动将很好地代表真实运动；虽然严格地说，除了时刻 t_0 之外，就位置和速度而言，并不同于实际的运动. 如果从一特定时刻 t 起，除了中心力之外，其他的力都消失，则在 t 之后，天体所遵循的椭圆根数称为密切根数或瞬时根数. 可以在任意时刻定义这样的无摄轨道根数：它们对应的椭圆轨道，应使一个在它上面运动的天体在给定时刻具有同真实天体同样的位置和速度.

因为事实上实际轨道简单地同密切轨道相切[1]，所以在 $t + \delta t$ 时刻的密切轨道将与 t 时刻的密切轨道不同，而具有不同的密切根数. 结论是：在受摄运动中，密切根数不再是常数，而是时间的函数.

同样的道理可以用于德洛勒变量. 当摄动在时刻 t 消失时，ϕ 变成 $\mu/2a (R = 0)$，方程组的解是 L, G, H, g, h（常数），$l = n(t - t_0)$. 由此可见，在一般的情况下，德洛纳变

1) 与这个术语的几何意义相反，密切轨道仅仅是与真实轨道相切，而不是"密切".

量也是上述意义下的密切变量，它们由(42)式同椭圆密切根数相联系。

密切根数常用于描述天体的受摄运动，其优点是：几何意义明晰而简单，同时变化又小。

当然，如果要把密切根数化成直角坐标或者相反，变换是容易的。因此，让我们考察 t 时刻的密切根数。根据定义，天体在 t 时刻的位置和速度是这样的，由这些量确定的二体运动的椭圆根数就是密切根数。所以，计算出对应于 t 时刻的密切根数的坐标和速度，我们就得到天体在该时刻的坐标和速度。因此，第 14 节的公式仍然有效，而得到下列的重要结论：

受摄运动在时刻 t 的坐标和速度，就是假设轨道是椭圆的，轨道根数等于同一时刻的密切根数时所求得的量。

32. 拉格朗日方程

鉴于当作变量看待的密切根数在天体力学中的重要性，我们将建立新的微分方程组，它等价于已经给出的方程组，但其变量是椭圆密切根数。

从(41)式给出的六个变量 L, G, H, l, g 和 h 的德洛纳方程出发，并进行由关系式(42)所定义的变量变换，把(42)式写成微分形式为

$$\left.\begin{aligned}
dL &= \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{a}}da,\\
dG &= \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{a}}da - \frac{\sqrt{\mu a}\,e}{\sqrt{1-e^2}}de,\\
dH &= \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{1-e^2}\cos i}{2\sqrt{a}}da - \frac{\sqrt{\mu a}\,e\cos i}{\sqrt{1-e^2}}de\\
&\quad - \sqrt{\mu a(1-e^2)}\sin i\,di
\end{aligned}\right\}. \tag{43}$$

$$dl = dM, \quad dg = d\omega, \quad dh = d\Omega. \tag{44}$$

利用关系式(41)，并注意到 $\phi = \mu/2a + R$，从(43)式可得

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\frac{dL}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{na^{3/2}}\frac{\partial\phi}{\partial l} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu a}\,e}\frac{dG}{dt} + \frac{\sqrt{\mu}\,(1-e^2)}{2\sqrt{a}\sqrt{\mu a}\,e}\frac{da}{dt}$$

$$= \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial\omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial M},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{\mu a}\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{dH}{dt}$$

$$+ \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{1-e^2}\cos i}{2\sqrt{a}\sqrt{\mu a}\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{da}{dt}$$

$$- \frac{\sqrt{\mu a}\,e\cos i}{\sqrt{1-e^2}\sqrt{\mu a}\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{de}{dt}$$

$$= \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial\Omega}$$

$$+ \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial\omega}.$$

另一方面，重排(42)式，得

$$a = \frac{L^2}{\mu}, \quad \sqrt{1-e^2} = \frac{G}{L}.$$

由此得 $e = \sqrt{1-(G^2/L^2)}$，最后有 $\cos i = \dfrac{H}{G}$.

(44)式的三个微分方程给出

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial H} = -\frac{\partial R}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial H}$$

$$= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial G} = -\frac{\partial R}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial G} - \frac{\partial R}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial G},$$

$$= -\frac{\partial R}{\partial e} \times \frac{-G}{L^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-(G^2/L^2)}}$$

$$-\frac{\partial R}{\partial i} \times \frac{-1}{\sin i} \times \frac{-H}{G^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dM}{dt} = -\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\mu}{2a}\right) - \frac{\partial R}{\partial L}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\mu^2}{2L^2}\right) - \frac{\partial R}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial L} - \frac{\partial R}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial L}$$

$$= \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{\partial R}{\partial a} \times \frac{2L}{\mu} - \frac{\partial R}{\partial e} \times \frac{G^2}{L^3}\frac{1}{\sqrt{1-(G^2/L^2)}}$$

$$= n - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

这样得到的等价于德洛纳系统的方程组，构成了下列拉格朗日方程：

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial M},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \omega},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{dM}{dt}=n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}. \tag{45}$$

备注：

正如上节所述，在这些方程中，n 只是代表 $\sqrt{\mu}/a^{3/2}$，它不再是常数，因为 a 不再是常数. 特别是在第六个方程中，由第一个方程积分得到的 n 项，应和其他两项有同样的精度，即相对于 R 中出现的小量量级相同. 所以，我们必须对给出半长径的方程进行二重积分，才能得到平近点角. 这是一个重要的普遍结果. 在天体力学中，在某些阶段不进行二重积分，则无论用什么方法都不可能解决受摄轨道的问题. 在某些特有的结果中，特别是涉及长周期项或数字积分的结果时，上述结论将有重要的推论.

33. 偏心率或倾角为零的情况

当 e 或 i 为零时，拉格朗日公式失效，因为其中一些方程的分母出现 e 或 i，并且我们将看到，在第五章中用德洛勒正则方程组解天体力学问题的时候，对于小 e 和小 i 也会导致不合理的结果，这是由于选择密切根数作为变量的缘故.

A. 小偏心率

考察偏心率很小的椭圆，受到了大小与偏心率同数量级的摄动，并设摄动引起长轴 AA' 缩短和短轴 BB' 伸长，换句话说，偏心率将减小. 密切椭圆将连续地变形直到 BB' 变成大于 AA'. 通过 $e=0$ 值之后，偏心率则将再开始增大，但同时近点角距改变了 $90°$，其原点也有如此剧烈的变化. 近点角也受到同量的不连续性的影响. 因此，写成密切根数的变量形式的解也是不连续的. 另一方面，$\omega+M$ 则保持是一个

连续变量，其原点保持固定或连续变化。

因此，我们可以寻找其他当 e 通过零时保持连续的变量，这些变量是：

$$\eta = e\sin\omega,\ \theta = e\cos\omega,\ \lambda = \omega + M. \tag{46}$$

由(45)式可以推出这种定义的变量的摄动方程，这些式子很少用到，我们不准备写出。

B. 小倾角

如果摄动使密切轨道平面能够绕着交点轴旋转并转过参考平面，则同上述小偏心率的情况有些类似。当交点线保持不变，恒为正值的倾角通过零值时，两个交点的意义交换了，升交点的经度剧烈地变化 180°。

因此，近点角距的原点突然变化，使它也受到 180° 的不连续性的影响。

我们再一次被迫采用类似于零偏心率的方法改变变量。通常，令

$$p = \mathrm{tg}\, i\sin\Omega,\ q = \mathrm{tg}\, i\cos\Omega,\ \tilde{\omega} = \Omega + \omega. \tag{47}$$

第四章 摄动理论

34. 引言

上一章，我们已经给出了密切椭圆根数或与之密切关联的变量(德洛纳变量)的微分方程组.

但是,这些方程的右端是摄动函数 R 的函数,而摄动函数是作为运动天体的直角坐标的函数给出的. 所以，我们遇见一种令人厌烦的不统一性，而必须把方程的两端表为相同变量的函数. 本章前一部分致力于把 R 表为密切根数的函数,而得到了这种方程的形式之后,我们力求找出解的形式,并给出一种建立这种解的可能步骤. 但是,在处理这些问题之前,我们来考察一些将会是特别有用的分析结果.

35. 傅里叶级数

我们来回顾一下下列同三角级数有关的结果: 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的有界和可积的周期函数，而且对于任何 x 值，其变差也有界, $f(x)$ 和 $\cos nx$ 或 $\sin nx$ (n 为整数) 的乘积也是可积的.

如果

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt,$$

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos pt\,dt,$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin pt\,dt, \tag{1}$$

级数

$$a_0+\sum_{p=1}^{\infty}(a_p\cos px+b_p\sin px) \qquad (2)$$

将是 $f(x)$ 的傅里叶展开式．在上面给定的条件下，约当定理证明此级数对于所有的 x 值均收敛，其和为

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

特别是，如果函数 $f(x)$ 是连续的，则无论什么 x 值，傅里叶级数一致收敛，其和为 $f(x)$。

36. 偏近点角的傅里叶级数展开式

我们已经知道，偏近点角 E 和平近点角 M 是以所谓克普勒方程的隐式方程相联系的：

$$E-e\sin E=M. \qquad (3)$$

［第二章 (18) 式］

如果 $e<1$，$dE/dM=1/(1-e\cos E)$ 将是周期为 2π 的周期函数而且连续．所以，由上节的结果，可把 E 展成一致收敛傅里叶级数．因此，让我们展开

$$E-M=e\sin E,$$

应用 (1) 式

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e\sin E\,dM,$$

并且

$$dM=(1-e\cos E)dE,$$

取 E 作为变量，积分限仍然不变，得

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e\sin E\,dE-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^2\sin E\cos E\,dE=0.$$

同样可得

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e\sin E\cos pM\,dM$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e\sin E\cos pM\,dM = 0,$$

因为这是奇函数的从 $-\pi$ 到 $+\pi$ 的积分．最后

$$\pi b_p = \int_0^{2\pi} e\sin E\sin pM\,dM$$

$$= \int_0^{2\pi} e\sin E(1 - e\cos E)\sin p[E - e\sin E]dE$$

分部积分，令

$$du = \sin pM\,dM,$$

$$u = \frac{-1}{p}\cos pM = -\frac{1}{p}\cos p(E - e\sin E),$$

$$v = e\sin E,\quad dv = e\cos E\,dE,$$

$$\pi b_p = \left[-\frac{1}{p}e\sin E\cos p(E - e\sin E)\right]_0^{2\pi}$$

$$+ \int_0^{2\pi}\frac{1}{p}\cos p(E - e\sin E)e\cos E\,dE.$$

上式完全积出的部分为零．另一方面，应用公式

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

得

$$\pi b_p = \frac{e}{2p}\int_0^{2\pi}\cos[(p+1)E - pe\sin E]dE$$

$$+ \frac{e}{2p}\int_0^{2\pi}\cos[(p-1)E - pe\sin E]dE.$$

引入函数

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kt - x\sin t)dt, \tag{4}$$

$(E - M)$ 的傅里叶级数展开式可写成

$$E = M + e\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_{p-1}(pe)+J_{p+1}(pe)}{p}\sin pM. \qquad (5)$$

37. 白塞耳函数的定义

设复变量 z 的函数 Z 为

$$Z = e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}.$$

其中，x 是实数，

$$Z = e^{xz/2}e^{-x/2z}.$$

如果 $|z| \neq 0$，则每个因子均可展成关于 $\frac{xz}{2}$ 或 $\frac{x}{2z}$ 的绝对收敛级数，得

$$e^{\frac{xz}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^m\frac{1}{m!}z^m,$$

$$e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}z^{-n},$$

其乘积是绝对收敛双重级数，

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+n}z^{m-n}. \qquad (6)$$

重新组合 z 同阶 $(m-n=k)$ 的项，并写成

$$Z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_k(x)z^k, \qquad (7)$$

其中

$$J_0(x) = 1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{1}{(1!)^2}+\left(\frac{x}{2}\right)^4\frac{1}{(2!)^2}-\cdots$$
$$+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}+\cdots, \qquad (8)$$

$$J_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^k\frac{1}{k!}\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{1}{1!(k+1)}+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\frac{(-1)^n}{n!(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}+\cdots\right]. \qquad (9)$$

$J_k(x)$ 称为 k 阶白塞耳函数，可由展式 (8) 和 (9) 算出.

令

$$z = e^{it},\ z - \frac{1}{z} = e^{it} - e^{-it} = 2i\sin t,$$

由此

$$Z = e^{ix\sin t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_k(x) e^{ikt}.$$

这只不过是表为虚指数形式的傅里叶级数. 计算积分

$$\int_0^{2\pi} e^{ix\sin t} e^{-ijt} dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_k(x) \int_0^{2\pi} e^{(k-j)it} dt, \tag{10}$$

现在则是

$$\int_0^{2\pi} e^{i\lambda t} dt = \int_0^{2\pi} (\cos\lambda t + i\sin\lambda t) dt = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \lambda \neq 0; \\ 2\pi, & \text{如果 } \lambda = 0. \end{cases}$$

(10) 式右端只有 $j = k$ 的一项不等于零，故得

$$\begin{aligned} 2\pi J_k(x) &= \int_0^{2\pi} e^{ix\sin t} e^{-ikt} dt = \int_0^{2\pi} e^{-i(kt - x\sin t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(kt - x\sin t) dt \\ &\quad - i\int_0^{2\pi} \sin(kt - x\sin t) dt. \end{aligned}$$

由于第二个积分为零(周期为 2π 的奇函数)，故得

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt - x\sin t) dt. \tag{11}$$

上式同表达式 (4) 恒同. 级数 (5) 中引入的系数是依赖于刚刚定义的白塞耳函数的表达式，可由 (8) 式或 (9) 式算出.

38. 白塞耳函数的一些性质

(a) 由 (9) 式易证

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x),$$

$$J_{-k}(-x) = J_k(x).$$

如果 x 是小量，则 $J_k(x)$ 与 x^k 同数量级，其主项为

$$\frac{1}{K!}(x/2)^k.$$

(b) 我们有

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_k(x) z^k.$$

对 z 求导数，得

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty} J_k(x) z^K = \sum_{-\infty}^{+\infty} k J_k(x) z^{k-1}.$$

上式两边 z^{k-1} 的系数相等，得

$$J_k(x) = \frac{x}{2k}[J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)]. \tag{12}$$

(c) 但是，如果对 x 求导数，则得

$$\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty} J_k(x) z^k = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{dJ_k(x)}{dx} z^k.$$

两端关于 z^k 的项相等给出

$$\frac{dJ_k(x)}{dx} = \frac{1}{2}[J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)]. \tag{13}$$

(d) 再对 x 求导数一次，得

$$\frac{d^2J_k(x)}{dx^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{dJ_{k-1}(x)}{dx} - \frac{dJ_{k+1}(x)}{dx}\right]$$
$$= \frac{1}{4}[J_{k-2}(x) - 2J_k(x) + J_{k+2}(x)].$$

应用(12)式和(13)式，得

$$\frac{d^2J_k(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_k(x)}{dx} + \left(1-\frac{k^2}{x^2}\right)J_k(x) = 0. \tag{14}$$

这就是解为 k 阶白塞耳函数的微分方程.

(e) 考察下列两个级数

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = J_0(x) + \sum_1^{\infty} J_k(x) z^k + \sum_1^{\infty} (-1)^k J_k(x) z^{-k},$$

$$e^{-\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = J_0(x) + \sum_1^{\infty} J_k(x) z^{-k} + \sum_1^{\infty} (-1)^k J_k(x) z^k.$$

两式逐项相乘，得

$$1 = J_0^2(x) + 2J_1^2(x) + 2J_2^2(x) + \cdots.$$

这样，我们已经得出下列重要的不等式：

$$|J_0(x)| \leqslant 1, \quad |J_k(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

39. $\cos jE$ 和 $\sin jE$ 的展开式

利用 (12) 式，我们可用下列的简单形式写出第 36 节中实例的结果：

$$E = M + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2J_p(pe)}{p} \sin pM. \tag{15}$$

进行与此实例中介绍的类似计算，可把 $\cos jE$ 和 $\sin jE$ 展成同样的形式. 因此，如果我们令

$$\cos jE = a_0^{(j)} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p^{(j)} \cos pM + \sum_{p=1}^{\infty} b_p^{(j)} \sin pM,$$

$$dM = (1 - e\cos E)dE,$$

则有

$$a_0^{(j)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos jE dM = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos jE(1 - e\cos E)dE.$$

由此得出

$$a_0^{(1)} = -\frac{e}{2}, \quad a_0^{(j>1)} = 0,$$

$$a_p^{(j)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos jE \cos pM dM$$

$$= \frac{1}{p\pi}\int_0^{2\pi} \cos jE \frac{d(\sin pM)}{dM} dM.$$

分部积分，有

$$p\pi a_p^{(j)} = [\sin jE \sin pM]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin pM \frac{d(\cos jE)}{dM} dM$$

$$= +j\int_0^{2\pi} \sin jE \sin p(E - e\sin E) dE$$

$$= \frac{j}{2}\int_0^{2\pi} \cos[(p-j)E - pe\sin E] dE$$

$$- \frac{j}{2}\int_0^{2\pi} \cos[(p+j)E - pe\sin E] dE,$$

$$a_p^{(j)} = \frac{j}{p}[J_{p-j}(pe) - J_{p+j}(pe)].$$

由于被积的是奇周期函数，可证 $b_p^{(j)} = 0$，故得

$$\cos jE = \begin{Bmatrix} -\frac{e}{2}\,(j=1) \\ 0\,(j \neq 1) \end{Bmatrix}$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{j}{p}[J_{p-j}(pe) - J_{p+j}(pe)] \cos pM. \qquad (16)$$

同样可得

$$\sin jE = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{j}{p}[J_{p-j}(pe) + J_{p+j}(pe)] \sin pM. \quad (17)$$

40. 二体问题的其他函数的表达式

从上述展开式出发，可以得到二体问题中出现的其他量的展开式．我们来考察几个例子：

(a) $r/a = 1 - e\cos E$.

(16)式给出 $\cos E$ 的展开式，由此，同(13)式一起，得

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2e}{p^2} \frac{dJ_p(pe)}{de} \cos pM. \qquad (18)$$

(b) $\left(\frac{r}{a}\right)^k = (1 - e\cos E)^k$ 可写成 $\sum_{j=0}^{k} a_j \cos jE$ 的形

式，α_l 是 e 的函数。

可以再利用（16）式．例如，

$$\left(\frac{r}{a}\right)^3=(1-e\cos E)^3=1-3e\cos E+3e^2\cos^2E$$

$$-e^3\cos^3E=1+\frac{3e^2}{2}-\left(3e+\frac{3e^3}{4}\right)\cos E$$

$$+\frac{3e^2}{2}\cos 2E-\frac{e^3}{4}\cos 3E.$$

利用（16）式，得

$$\left(\frac{r}{a}\right)^3=1+3e^2+\frac{3e^4}{8}$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{-12e-3e^3}{4p}(J_{p-1}(pe)-J_{p+1}(pe))\right.$$

$$+\frac{3e^2}{p}(J_{p-2}(pe)-J_{p+2}(pe))$$

$$\left.-\frac{3e^3}{4p}(J_{p-3}(pe)-J_{p+3}(pe))\right]\cos pM. \tag{19}$$

(c) $$\frac{a}{r}=\frac{1}{(1-e\cos E)}=\frac{dE}{dM}$$

$$=1+\sum_{p=1}^{\infty}2J_p(pe)\cos pM. \tag{20}$$

(d) 从椭圆方程

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$$

得

$$\cos v=-\frac{1}{e}+\frac{1-e^2}{e}\times\frac{a}{r}$$

$$=-e+\sum_{p=1}^{\infty}2\frac{(1-e^2)}{e}J_p(pe)\cos pM. \tag{21}$$

另一方面，由 $\frac{r}{a}=(1-e^2)/(1+e\cos v)$ 求导数得

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right)=\frac{1}{1-e^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 e\sin v\frac{dv}{dM}.$$

于是，从面积定律

$$r^2\frac{dv}{dM}=\frac{C}{n}=a^2\sqrt{1-e^2}$$

得

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right)=\frac{e\sin v}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$\sin v=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$=\sqrt{1-e^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2}{p}\frac{dJ_p(pe)}{de}\sin pM. \qquad (22)$$

(e) 椭圆上的点相对于长轴和通过焦点的垂直轴的简化坐标(参看第二章(11)式)为

$$x=r\cos v=a(\cos E-e)$$

$$=a\left[-\frac{3e}{2}+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}(J_{p-1}(pe)-J_{p+1}(pe))\cos pM\right], \qquad (23)$$

$$y=r\sin v=a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

$$=a\sqrt{1-e^2}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}(J_{p-1}(pe)+J_{p+1}(pe))\sin pM\right]. \qquad (24)$$

(f) 关于 x 和 y 运动微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu\frac{x}{r^3},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\mu\frac{y}{r^3},$$

因此

$$\frac{x}{r^3}=-\frac{1}{\mu}\frac{d^2x}{dM^2}\left(\frac{d^2M}{dt^2}\right)=-\frac{1}{\mu}\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{d^2x}{dM^2}\right).$$

前面的方程对 M 求导数两次，得

$$\frac{x}{r^3}=\frac{1}{a^2}\sum_{p=1}^{\infty}p[J_{p+1}(pe)-J_{p-1}(pe)]\cos pM, \tag{25}$$

$$\frac{y}{r^3}=\frac{-\sqrt{1-e^2}}{a^2}\sum_{p=1}^{\infty}p[J_{p+1}(pe)+J_{p-1}(pe)]\sin pM. \tag{26}$$

这样，直接地或联合应用上述展开式，进行级数运算，可得二体问题中大部分函数的傅里叶展开式.

41. E 和 v 之间的关系式

我们已知关系式

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}, \quad [\text{第二章}(13)\text{式}]$$

现在令

$$p=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \text{得} \quad \operatorname{tg}\frac{E}{2}=p\operatorname{tg}\frac{v}{2}. \tag{27}$$

应用虚指数，上式可写成

$$\frac{e^{iE}-1}{e^{iE}+1}=p\frac{e^{iv}-1}{e^{iv}+1},$$

或写成

$$e^{iE}=\frac{e^{iv}(1+p)-(p-1)}{-e^{iv}(p-1)+(p+1)}.$$

进一步令 $q=\frac{(1-p)}{(1+p)}\left[\text{从}(27)\text{式有}\ q=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}\right]$

得

$$e^{iE}=e^{iv}\frac{1+qe^{-iv}}{1+qe^{iv}}.$$

两边取对数，得

$$iE=iv+\ln(1+qe^{-iv})-\ln(1+qe^{iv}).$$

q 和偏心率同数量级. 如果 q 是小量，则可把这两个对数函数展成级数，除以 i 后，得

$$E = v + 2\left(q\frac{-e^{iv}+e^{-iv}}{2i} + \frac{q^2}{2}\frac{e^{2iv}-e^{-2iv}}{2i} + \cdots\right.$$
$$\left. + (-1)^n\frac{q^n}{n}\frac{-e^{niv}+e^{-niv}}{2i} + \cdots\right),$$
$$E = v - 2q\sin v + \frac{2q^2}{2}\sin 2v - \cdots$$
$$+ (-1)^n\frac{2q^n}{n}\sin nv + \cdots. \tag{28}$$

同样地，把 p 和 $\frac{1}{p}$ 交换，q 变成 $-q$，得

$$v = E + 2q\sin E + \frac{2q^2}{2}\sin 2E + \cdots$$
$$+ \frac{2q^n}{n}\sin nE + \cdots. \tag{29}$$

42. 达朗贝尔性质

在大部分天体力学的应用中，必须考虑到偏心率是小量（实际上，太阳系里大多数天体就是这种情况）．在偏心率小的条件下，利用第 38 节的性质 (a)，可以给出上述级数的定性理解，现在假定我们希望找出傅里叶级数中的主要项并了解其他项的作用．

在 $\cos jE$ 和 $\sin jE$ 的级数 (16) 式和 (17) 式中，最主要的项是含有 $J_0(pe)$ 的项；当 $p-j=0$ 即 $p=j$ 时出现这种项．

主要项为 e 的零阶，是展开式中含有 $\cos jM$ 或 $\sin jM$ 的项．"相邻"项 [$(j-1)M$ 或 $(j+1)M$ 的项] 包含 $J_1(pe)$ 和 $J_{-1}(pe)$，因此，为 e 的一阶．同样，在"距离"为 n 的 $(j-n)M$ 和 $(j+n)M$ 项，为 e 的 n 阶．

最后，我们知道，$\cos pM$ 的项包含 J_{p-j} 和 J_{p+j}．其中，

$p+j$ 和 $p-j$ 总是具有相同的奇偶性．因此，$\cos pM$ 的项将为偶阶(或奇阶)项构成，而两个相邻的项则具有相反的奇偶性．

从第 40 节中的 (b) 也可见，$(r/a)^k$ 具有类似的性质，其零阶项是常数项．因此，$(r/a)^k\cos jE$ 和 $(r/a)^k\sin jE$ 的展开式具有和 $\cos jE$ 或 $\sin jE$ 相同的主项，并保持关于相邻项阶数的性质．

进一步可以证明，上述结果也适用于 $(r/a)^{-k}$；虽然计算是比较复杂的．最后，(28) 式和 (29) 式给出的 E 和 v 之间的关系式满足同样的性质，带有一个 v 的零阶项．q^n 的展开式或者是 e 的偶阶或者是奇阶，由此可以推出，形式

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k}\sin jv \quad 或 \quad \left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k}\cos jv$$

的展开式与 jE 类似的表达式的展开式具有同样的性质．

最后，介绍下列所谓达朗贝尔性质．我们可以检验这种性质．例如，在第 40 节的级数上进行检验．

达朗贝尔性质是：形式为

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k}\sin jv,\quad \left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k}\cos jv,\quad \left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k}\sin jE,$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k}\cos jE,\quad \left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k}x^j,\quad \left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k}y^j,$$

的表达式可以表为傅里叶级数，其系数是关于 e 的奇阶或偶阶级数，$\cos pM$ 或 $\sin pM$ 的系数是 e 的 $|p-j|$ 阶．

利用这个性质我们可以说，如果级数的某一项是零阶，则相邻项是一阶，再相邻的项是二阶等．如果偏心率 e 是小量，则可以只保留中心项两边的某些项并考虑把其他的项略去．因此，在 x/r^3 的展开式 (25) 中，如果可以略去 e^4 项，则只要保留主项 ($\cos M$ 的项，因为这里 $j=1$) 后面的三项就够了．

因此，我们将保留 $\cos M$，$\cos 2M$，$\cos 3M$ 和 $\cos 4M$ 的项以及常数项。

43. 关于 e 的有限幂的展开式

由于系数中存在白塞耳函数，第 39 节和第 40 节的展开式比较难用。但是，正如可以忽略傅昱叶级数中系数为 e 的高阶的项一样，我们也可把白塞耳函数展成 e 的级数((9)式)，并只限于取到我们认为可忽略的项。这是通常采用的方法。

例如，如果我们略去 e^4，则第 40 节和第 41 节中的一些级数变成：

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + \left(-e + \frac{3}{8}e^3\right)\cos M - \frac{e^2}{2}\cos 2M - \frac{3}{8}e^3\cos 3M, \tag{30}$$

$$\frac{a}{r} = 1 + \left(e - \frac{e^3}{8}\right)\cos M + e^2\cos 2M + \frac{9}{8}e^3\cos 3M, \tag{31}$$

$$x = -\frac{3e}{2} + \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right)\cos M + \left(\frac{e}{2} - \frac{e^3}{3}\right)\cos 2M + \frac{3}{8}e^2\cos 3M + \frac{e^3}{3}\cos 4M, \tag{32}$$

$$y = \left(1 - \frac{5}{8}e^2\right)\sin M + \left(\frac{e}{2} - \frac{5}{12}e^3\right)\sin 2M + \frac{3}{8}e^2\sin 3M + \frac{e^3}{3}\sin 4M, \tag{33}$$

$$E = M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right)\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M$$

$$+\frac{3}{8}e^3\sin 3M, \tag{34}$$

$$v = M + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M$$

$$+\frac{13}{12}e^3\sin 3M, \tag{35}$$

最后的级数是由级数 (34) 代入 (29) 而得.

44. 按照 e 的幂次展开的级数的收敛性

我们已经知道，对于 $e<1$ 的任何值，第 40 节的级数都是绝对收敛的. 但是，当作为关于 e 和 M 的双重级数考虑时，它们就不是绝对收敛的；级数项的次序变化可以改变收敛半径. 如果 e 是小量，则收敛性仍然保持.

例如可以证明，作为 M 的函数，E 的表达式 (34) 写成展开式

$$E = M + e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M$$

$$+ e^3\left(-\frac{1}{8}\sin M + \frac{3}{8}\sin 3M\right) + \cdots \tag{36}$$

后，只是对于 $e<0.6627\cdots$ 才收敛.

同样的限制对于其他级数也适用.

必须注意：取近似到 e 的某次幂的有限表达式 (30) 至 (35)，实际上只是关于偏心率升幂的级数的最前面几项. 因此，上述的收敛性的限制条件是实际工作中使用的截断表达式有效性的实际限制.

除了少数例外(彗星、某些小行星、木卫 8)，太阳系天体的瞬时偏心率从来没有达到过这个限度. 在大多数的情况下，即使 e 不小于 0.1，也小于 0.2. 因此，只要保留足够多的项，使略去的项实际上可以忽略，则应用近似表达式将是合理

的．在选择所限定的 e 幂次的保留项时，将利用达朗贝尔性质．

45. 摄动函数的表达式（月球的情况）

现在，我们要把摄动函数完全表为密切根数的函数．考察三体问题（其中第三体的质量可忽略）的摄动函数 R．按照 R 的定义（第 29 节）和 V_2 的表达式（第 18 节），得

$$R = km\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x'x + y'y + z'z}{r'^3}\right). \tag{37}$$

其中，x'，y'，z' $(x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2)$ 是在椭圆上运动的摄动体的坐标，Δ 是摄动体离开所研究的天体〔其坐标为 x，y，$z(r)$〕的距离．

我们有

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= r'^2 - 2(x'x + y'y + z'z) + r^2.$$

例如，如果我们假设 $r' \gg r$（这是月球受太阳摄动的情况），则有

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'}\left[1 - \frac{2(xx' + yy' + zz')}{r'^2} + \frac{r^2}{r'^2}\right]^{-1/2}.$$

把主天体到其他两个天体的联线之间的夹角称为 S，有

$$\cos S = \frac{xx' + yy' + zz'}{r'r},$$

由此

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'}\left[1 - \frac{2r}{r'}\cos S + \frac{r^2}{r'^2}\right]^{-1/2}. \tag{38}$$

因为 r/r' 是小量，所以方括弧部分可展成 r/r' 的幂级数．例如，利用二项式公式

$$(1 - \varepsilon)^{-1/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{5}{16}\varepsilon^3 + \cdots$$

得

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r'}\left[1+\frac{r}{r'}\cos S+\frac{r^2}{r'^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right)\right.$$

$$\left.+\frac{r^3}{r'^3}\left(-\frac{3}{2}\cos S+\frac{5}{2}\cos^3 S\right)+\cdots\right].$$

可把上式代入R的表达式中，但是，注意到运动方程只是依赖于R对所研究的天体的根数的偏导数，因此，我们可以忽略R中任何只依赖于摄动天体的根数的附加项，例如$1/r'$。

也可看出R的第二项和$\frac{1}{\Delta}$的第二项相抵消．因此，对于R保留下式就可以了：

$$R=\frac{km}{r'}\left[\frac{r^2}{r'^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right)\right.$$

$$\left.+\frac{r^3}{r'^3}\left(-\frac{3}{2}\cos S+\frac{5}{2}\cos^3 S\right)+\cdots\right]. \tag{39}$$

备注：

从(38)式方括弧部分的展开式所得到的括在圆括弧里的量称为勒让德多项式：

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\cdots.$$

可证

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

和

$$R=\frac{km}{r'}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos S).$$

46. 化成椭圆运动的变量

我们继续研究受太阳摄动的卫星的运动情况. R 由(39)式给出. 为了简化计算,只给出上面显式中的第一项,即

$$R_1=\frac{km}{r'^3}r^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2S\right). \tag{40}$$

令 S 和 L 分别代表太阳和卫星的地心方向; 令 N 代表卫星(L)轨道的升交点(图 7); Ω, ω 和 v 分别代表卫星的升交点经度,近地点角距和真近点角; Ω', ω' 和 v' 代表太阳相应的根数,而经度的起算点是 γ.

$$\widehat{\gamma S}=\omega'+v',\ \widehat{NL}=\omega+v,\ \widehat{\gamma N}=\Omega.$$

令

$$\phi=\Omega+\omega+v,\ \phi'=\omega'+v',$$

由此

$$\widehat{NL}=\phi-\Omega,\ \widehat{SN}=\phi'-\Omega.$$

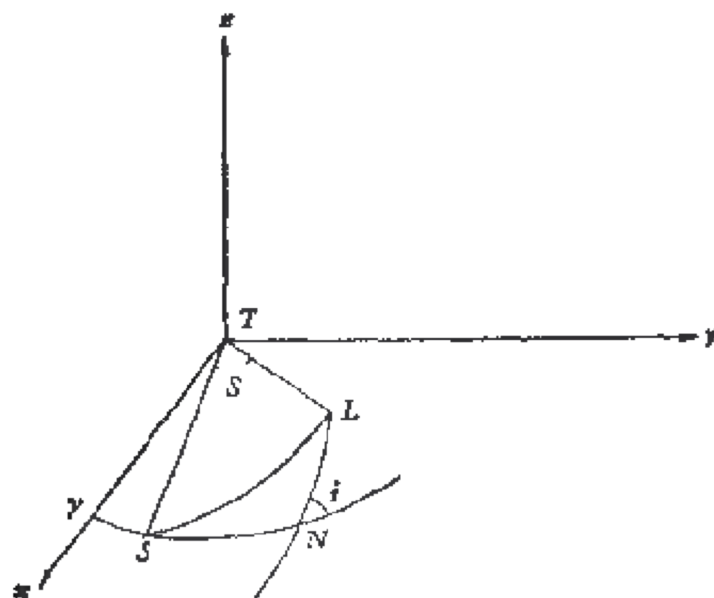


图 7

在球面三角形 SNL 中,有下列关系式:

$$\cos S = \cos(\psi - \Omega)\cos(\psi' - \Omega) + \sin(\psi - \Omega)\sin(\psi' - \Omega)\cos i.$$

用 $\cos^2\left(\frac{i}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{i}{2}\right)$ 代替 $\cos i$，并用 $\left(\cos^2\frac{i}{2} + \sin^2\frac{i}{2}\right)$ 乘右端的第一项，得

$$\cos S = \cos^2\frac{i}{2}\cos(\psi - \psi') + \sin^2\frac{i}{2}\cos(\psi + \psi' - 2\Omega).$$

由此得

$$R_1 = \frac{kmr^2}{r'^3}\Big[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^4\frac{i}{2}\cos^2(\psi - \psi') + 3\cos^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i}{2}\cos(\psi - \psi')\cos(\psi + \psi' - 2\Omega) + \frac{3}{2}\sin^4\frac{i}{2}\cos^2(\psi + \psi' - 2\Omega)\Big].$$

依照下列关系式:

$$\psi - \psi' = \Omega + \omega + v - \omega' - v',$$
$$\psi + \psi' - 2\Omega = \omega + \omega' + v + v' - \Omega,$$
$$km = n'^2 a'^3,$$

化回到真近点角和其他根数，则可看出有可能把 R_1（实际上是 R）表为椭圆根数的函数:

$$R_1 = n'^2 a^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \Big[-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos^4\frac{i}{2} + \frac{3}{4}\cos^4\frac{i}{2}\cos 2(\omega - \omega' + v - v' + \Omega) + \frac{3}{8}\sin^2 i\,[\cos(2\omega + 2v) + \cos(2\omega' + 2v' - 2\Omega)]$$

$$+\frac{3}{4}\sin^4\frac{i}{2}+\frac{3}{4}\sin^4\frac{i}{2}\cos 2(\omega+\omega'+v+v'-\Omega)\Big].\quad(41)$$

47. 摄动函数的展开

用分离 v 和 v' 的方法，可以进一步对(41)型的表达式进行变换。一种简单但又艰苦的计算证明，方程右端也可写成下列形式的项之和。

$$n'^2a^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 f_1(v)f_2(v')f_3(i,\omega,\omega',\Omega).\qquad(42)$$

其中，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是下列函数当中的一种：$\sin 2x$，$\cos 2x$ 或 1，而 f_3 是比较复杂的三角函数。

(42)式中下列各项

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3,\quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^3\cos 2v',\quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^3\sin 2v',$$

都是时间的已知函数，并可应用第 40 节所介绍的形式的公式，以太阳的偏心率 e' 和平近点角 M' 表示。

另一方面，(42)式中的其他项，即

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2,\quad \left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2v \text{ 和 } \left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2v$$

以傅里叶级数的形式表为卫星的平近点角 M (傅里叶级数的系数只依赖于相应的偏心率)。把这些表达式代入，我们可以求出 R 表示为时间(通过 M')和卫星的六个密切根数 a，e，i，Ω，ω 以及 M 的函数。

这些表达式的收敛情况和上面几节的表达式一样(参看第 40 节以后各节)。

在小偏心率 e 和 e' 的情况下(这是太阳系的普遍情况)，所得到的级数为收敛，我们可以略去高于 e 和 e' 某一阶(阶数根据所需的精度而定)的所有项。

在摄动体沿着椭圆轨道围绕主天体[1]运动的情况下，摄动函数 R_1 或整个 R 可设为下列形式：

$$R = \Sigma A_{l_1l_2l_3l_4l_5}(a, e, i, a', e')\cos(l_1M + l_2M' + l_3\omega + l_4\Omega + l_5\omega'), \tag{43}$$

其中，$l_1, l_2, \cdots, l_5$ 为零或正、负整数.

重新组合关于 M 和 M' 的项，其系数依赖于 ω, ω' 和 Ω，得到的最后表达式不出现正弦项. 为了证实这个性质，我们注意到，(43)式中奇级数只与正弦项组合在一起，而偶级数只与余弦项组合，这依赖于上面推导的正弦和余弦乘积的公式的效力.

此外，虽然在此方法中系数 A 是 a，e 和 i 的函数. 但是，每当我们需要的时候，也不难表示为其他的密切变量. 如是根据下式变换变量

$$L = \sqrt{\mu a}, \quad G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i,$$

我们可把 A 表示为德洛纳变量 L, G 和 H 的函数.

48. 按一个小参数的展开

用密切变量表示的摄动函数的进一步值得注意的性质是，我们可将其展成关于一个小参数的快速收敛级数 [参看(39)式]. 于是，令 α 和 α' 等于接近于 r 和 r' 平均值的常数，并令 $\frac{\alpha}{\alpha'} = \varepsilon$，其中 ε 是小量，对于月球约为1/400，则可把 R 写成

$$R = \frac{km}{r'}\left[\varepsilon^2\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 S\right) + \varepsilon^3\left(\frac{r}{\alpha}\right)^3\left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^3 \cdot\left(-\frac{3}{2}\cos S + \frac{5}{2}\cos^3 S\right) + \cdots\right],$$

1) 英译本为"受摄天体"，有误，这里按法文本译出. ——译者注

其中 a'/r' 和 r/a 接近于 1. 于是，R 被展成关于小参数 ε 的快速收敛级数.

在行星摄动的情况下，r 和 r' 具有相同的数量级，摄动函数依赖于行星的质量. 同太阳的质量相比，行星的质量是很小的量(参看第七章). 在第五章我们将看到，行星的非球形摄动也可展成用小参数表示的快速收敛级数.

显然，同微分式一样，摄动方程的解也将依赖于一个或几个小参数. 通常，实际工作总是用同样的小参数进行解的展开，并略去超过一定阶数的项. 但是，邦加雷 (Poincare) 第一次证明了这种方法实际上是合理的. 现在，我们来叙述邦加雷的结果，但不进行推导.

49. 存在性定理*

哥西 (Cauchy) 已经证明写成下列简化形式的微分方程组的解析解[1]的存在性：

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = \phi(x, y, t).$$

如果对于 $|x| < R$, $|y| < R'$ 和 $t \leqslant r$，φ 和 ϕ 是对 x 和 y 有界，对 t 连续的解析函数，则可找到方程组的解 $x(t)$ 和 $y(t)$，对于 $|t| < t_0 < r$ 也是解析的.

至于微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y, \varepsilon, t), \quad \frac{dy}{dt} = \phi(x, y, \varepsilon, t).$$

其中，ε 是接近于零的可变参数. 邦加雷定理(哥西定理的推广形式)指出，φ 和 ϕ (对 t 连续和对 x, y 解析)对于 ε 也是

---

* 标题为"证明的定理"有误，这里按法文原版译出. ——译者注

1) 当一个函数在给定区域可展成某些变量的幂级数时，则称此函数为这些变量的解析函数.

解析的.

考察某一个解

$$x(t, \varepsilon), \ y(t, \varepsilon).$$

当 $\varepsilon = 0$ 时，化为 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$. 可把此解展成关于 ε 整幂的级数:

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots, \\ y(t, \varepsilon) &= y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \cdots. \end{aligned} \tag{44}$$

在上述假设前提成立的区域内，当 $\varepsilon < \varepsilon_0 \neq 0$ 时，不管 t 值如何，这些级数都收敛.

由此得出的结论是，鉴于上面的解满足解析性条件，因此用于天体力学中的那些依赖于一个或几个小参数的微分方程，其解可以按照这些小参数展开.

特别在直角坐标系统中，由于摄动函数及其导数与微分方程的右端比较可以认为是小量，因此其通解可展成表示 R 的小量的级数. 而且，如果 $R \to 0$，就化成没有摄动力的情况的解，即二体问题的解

50. 用密切根数表示的方程形式

无论是德洛纳变量表示的 (45) 型，或椭圆根数表示的 (41)型，都可把方程写成 (a) 和 (b) 两组:

(a) 关于度量变量 a, e, i 或 L, G, H (通常以 L_i 表示)的方程. 这些方程的右端包含 R 对角变量的偏导数(结合在 R 的余弦项中)，如第 47 节的变换 [方程 (43)]. 可把这些方程写成普遍形式:

$$\frac{dL_i}{dt} = \Sigma B_i(L_k) \sin(\Sigma \alpha_j l_j). \tag{45}$$

其中，B_i 依赖于度量变量 L_j，α_j 是整数，而 l_j 是角变量或时间的线性函数(例如，如果 R 依赖于其他天体的位置，而这

些天体的位置表为平近点角的函数). B_i 项包含表示 R 的小参数 ε.

(b) 关于角变量 l, g, h 或 M, ω, Ω (通常以 l_i 表示)的方程. 这些方程的右端在余弦项的系数中包含 R 对度量变量的偏导数, 而且其中某些方程包含只依赖于度量变量而没有小参数作为因子的项. 在拉格朗日方程 dM/dt 中,这个项是 $n=\sqrt{\mu}\,a^{-3/2}$, 而在德洛纳变量方程 dl/dt 中,则为 $\frac{\partial}{\partial L}(\mu^2/2L^2)=-\mu^2/L^3$, 这是从 $\phi=R+\mu^2/2L^2$ 的第二项推得的.

可以把这些方程写成比较普遍的形式:

$$\frac{dl_i}{dt}=a_i(L_k)+\Sigma b_{ij}(L_k)\cos(\Sigma\alpha_j l_j). \tag{46}$$

其中, a_i 和 b_{ij} 依赖于度量变量 L_k, α_j 和 l_j 的意义同上. a_i 项可能是小量 (ε 量级), 也可能是有限值, 而所有的 b_{ij} 项都包含小参数 ε 作为因子.

51. 解的方法

这里将要介绍的方法,不是最简单的,但揭示出解的显著特征.

根据邦加雷定理,如果 R 是 ε 的函数(设 ε 是小量),则解的形式为 (44) 式,可写成

$$\begin{aligned} L_i&=L_{i_0}+\varepsilon L_{i_1}+\varepsilon^2 L_{i_2}+\cdots,\\ l_i&=l_{i_0}+\varepsilon l_{i_1}+\varepsilon^2 l_{i_2}+\cdots. \end{aligned} \tag{47}$$

如上所述, L_{i_0} 和 l_{i_0} 代表二体问题的解,它们是常数或是时间的函数(对于 l 和 M).

把这些表达式代入 (45) 和 (46) 式,得

$$\frac{dL_{i_0}}{dt}+\varepsilon\frac{dL_{i_1}}{dt}+\varepsilon^2\frac{dL_{i_2}}{dt}+\cdots$$

$$= \Sigma[\varepsilon B_{ij1}(L_k) + \varepsilon^2 B_{ij2}(L_k) + \cdots] \sin(\Sigma\alpha_j l_j),$$

$$\frac{dl_{i_0}}{dt} + \varepsilon \frac{dl_{i_1}}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dl_{i_2}}{dt} + \cdots$$

$$= a_i(L_k) + \Sigma[\varepsilon b_{ij1}(L_k) + \varepsilon^2 b_{ij2}(L_k) + \cdots] \cos(\Sigma\alpha_j l_j). \tag{48}$$

然后，令这些方程两边关于 ε 同阶的项相等.

(a) 与 ε 无关的项

$$\frac{dL_{i_0}}{dt} = 0, \qquad \frac{dl_{i_0}}{dt} = a_i(L_{k_0}).$$

这表明 L_{i_0} 是常数，而 l_{i_0} 是时间的线性函数:

$$l_{i_0} = a_i(L_{k_0})(t - t_0) = n_{i_0}(t - t_0).$$

(b) 直接把 L_{k_0} 代入 B_{ij1} 和 b_{ij1}，和把 L_{k_1} 代入 a_i 可得 ε 项*:

$$\frac{dL_{i_1}}{dt} = \Sigma B_{ij1}(L_{k_0}) \sin(\Sigma\alpha_j l_{j_0}),$$

$$\frac{dl_{i_1}}{dt} = \sum \frac{\partial a_i(L_{k_0})}{\partial L_{k_0}} L_{k1} + \Sigma b_{ij1}(L_{k_0}) \cos(\Sigma\alpha_j l_{j_0}).$$

度量变量的方程给出

$$L_{i_1} = \frac{\Sigma B_{ij1}(L_{k0}) \cos(\Sigma\alpha_j l_{j_0})}{-\Sigma\alpha_j n_{j_0}}. \tag{49}$$

n_{j_0} 项已经确定. 我们不需要考虑 L_{i_1} 的积分常数，因为在确定与 ε 无关的项的时候，已引入在 L_{i_0} 之中. 现在，我们可以把(49)式代入 $\frac{dl_{i_1}}{dt}$ 方程的右端，所得到的级数的形式为

$$\frac{dl_{i_1}}{dt} = a_{i_1} + \Sigma b_{ij_1}(L_{k_0}) \cos(\Sigma\alpha_j l_{j_0}),$$

---

* 英文版有误，这里按法文版订正. ——译者注

逐项积分得

$$l_{i_1}=a_{i_1}(t-t_0)+\frac{\Sigma b_{ij_1}(L_{k0})\sin(\Sigma\alpha_j l_{j_0})}{\Sigma\alpha_j n_{j_0}}. \qquad (50)$$

我们看到，通常所有角变量都包含(但度量变量不包含)长期项，其中以线性函数形式出现的时间 t 是在三角函数的外面。

(c) 我们可以再一次把这样得到的整个解代入(48)式的右端，并使两边 ε^2 的项相等．现在计算变得比较复杂．让我们从 $\frac{dL_{i_2}}{dt}$ 着手，有

$$\frac{dL_{i_0}}{dt}+\varepsilon\frac{dL_{i_1}}{dt}+\varepsilon^2\frac{dL_{i_2}}{dt}$$

$$=\Sigma[\varepsilon B_{ij_1}(L_{k_0}+\varepsilon L_{k_1})+\varepsilon^2 B_{ij_2}(L_{k_0})]\sin[\Sigma\alpha_j(\bar{l}_{j_0}+\varepsilon l_{j_1})]$$

$$=\Sigma\left[\varepsilon B_{ij_1}(L_{k_0})+\varepsilon^2\frac{\partial B_{ij_1}}{\partial L_{k_0}}L_{k1}+\varepsilon^2 B_{ij_2}(L_{k_0})\right]$$

$$\times[\sin(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0})\cos(\Sigma\alpha_j\varepsilon l_{j_1})+\cos(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0})\sin(\Sigma\alpha_j\varepsilon l_{j_1})].$$

我们把 l_j 展成 $\bar{l}_{j_0}+\varepsilon l_{j_1}$，其中第一项是 l_j 的长期项，而 l_{j_1} 是周期部分并含有 ε 因子．现在只令两端 ε^2 项相等，得

$$\cos\Sigma\alpha_j\varepsilon l_j=1, \qquad \text{(略去高于 } \varepsilon^2 \text{ 的项)}$$

$$\sin\Sigma\alpha_j\varepsilon l_j=\alpha_j\varepsilon l_{j_1}, \qquad \text{(略去高于 } \varepsilon^3 \text{ 的项)}$$

$$\frac{dL_{i2}}{dt}=\Sigma B_{ij_1}(L_{k_0})\varepsilon\alpha_j l_{j_1}\cos(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0})$$

$$+\Sigma\left[\frac{\partial B_{ij_1}}{\partial L_{k0}}L_{k1}+B_{ij_2}(L_{k0})\right]\sin(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0}).$$

其中

$$l_{j_1}=\Sigma B'_{ij_1}(L_{k_0})\sin(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0})$$

和

$$L_{i_1}=\Sigma B''_{ii_1}(L_{k_0})\cos(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0}).$$

利用三角公式

$$\cos a\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)],$$

把乘积 $\cos(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0})\sin(\Sigma\alpha_i\bar{l}_{j_0})$ 化成 $\sin(\Sigma\alpha_k\bar{l}_{k_0})$ 项。

最后，$\frac{dL_{i_2}}{dt}$ 采取的形式为

$$\frac{dL_{i_2}}{dt}=\Sigma B_{ii_2}\sin(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0}).$$

如上进行积分，得出与 L_{i_1} 形式相同的 L_{i_2}。

其余的计算同 (b) 一样进行：把 L_{i_2} 的解代入 a_{i_0}，而 (b) 的解代入其他的项；现在，从方程右端的有限展开得到的三角函数的乘积将化成余弦，故得

$$\frac{dl_{i_2}}{dt}=a'_{i_2}+\Sigma b'_{ii_2}(L_{k_0})\cos(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0}),$$

而 l_{i_2} 与 (50) 式 l_{i_1} 具有相同的形式。

(d) 这种过程可以无限进行下去，每叠代一次，解中的 ε 的幂次就增加一阶。度量变量总是表为余弦级数的形式：

$$L_i=L_{i_0}+\Sigma C_{ij}(L_{k_0})\cos(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0}). \tag{51}$$

而角变量表为时间的线性函数和正弦级数的形式：

$$l_i=\bar{l}_{i_0}+\Sigma S_{ij}(L_{k_0})\sin(\Sigma\alpha_j\bar{l}_{j_0}). \tag{52}$$

必须附加说明：三角函数里的引数不仅仅包含变量的 $\bar{l}_{i_0}$ 长期项，也可包含时间的其他线性函数；在介绍摄动函数的展开时，我们已经遇到过。

备注：

记住重要的结果是：叠代过程只是产生使角变量具有特色的线性长期项，特别是没有含 $(t-t_0)^2$ 作为因子的项，也没有所谓混合项(在混合项中，$(t-t_0)$ 两次在式子里出现，

一次作为系数的因子,一次作为三角函数里的引数).

德洛勒 (Delaunay) 对月球的情况提出了一个定理描述这个结果,随后被梯塞朗 (Tisserand) 推广到行星. 这个定理对于遵守这些方程的任意系统的稳定性具有很大的重要性; 虽然只有当所表示的解的收敛性被保证时才行. 以后我们将看到,这个条件一般地并不满足.

52. 长周期项和短周期项

现在，我们应用上述结果讨论围绕行星运转的卫星 (月球)的运动，而行星根据克普勒定律绕太阳旋转，这代表月球理论的主要的问题，关于摄动函数的形式，在第 47 节我们已经知道，R 依赖于五个角变量 M，M'，ω，Ω 和 ω'，其中 M，ω 和 Ω 是月球运动的密切根数，M' (太阳的平近点角)是时间的线性函数,而 ω' (太阳的近地点角距)是常数. 如果适当地选择经度原点，可取 ω' 为零. 这个问题的度量变量 a，e，i 对应于月球的运动. 如果 a_0，e_0，i_0 是 a，e，i 的积分常数,而且角变量 Ω，ω 和 M 的长期部分由下式给出

$$\bar{\Omega} = \Omega_0 + n_\Omega(t - t_0), \quad \bar{\omega} = \omega_0 + n_\omega(t - t_0),$$

和

$$\bar{M} = M_0 + n(t - t_0),$$

则可把解写成

$$a = a_0 + \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(a_0, e_0, i_0 \cdots) \cos(\alpha\bar{M} + \beta\bar{\omega} + \gamma\bar{\Omega} + \delta M'). \tag{53}$$

e 和 i 的解的形式与此类似. 这里，我们且不提 $a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ 与太阳轨道根数的关系. 角变量的表达式可以 Ω 为例说明:

$$\Omega = \bar{\Omega} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \Omega_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(a_0, e_0, i_0 \cdots) \sin(\alpha\bar{M} + \beta\bar{\omega} + \gamma\bar{\Omega} + \delta M'). \tag{54}$$

ω和M的解的形式与此类似．在和数Σ中，α, β, γ和δ是整数或零，可以代表任何值的组合，但不能全为零．

(a) α和δ不同时为零的项称为短周期项．因此，关于月球绕地球的运动，有下列的可能性：

$\alpha = 1$，$\delta =$ 任何值，周期约为月球的恒星周期(27天)；

$\alpha = 0$，$\delta = 1$，　　周期 $=$ 1 年；

$\alpha > 1$，$\delta =$ 任何值　周期$<$1 月；

$\alpha = 0$，$\delta > 1$，　　周期$\leqslant$ 6 个月．

$\bar{\omega}$和$\bar{\Omega}$的时间系数很小，难以变更上列周期．

(b) $\alpha = \delta = 0$ 的项称为长周期项．因为ω和Ω的长期项只在第二次近似才出现(ε 项)，n_ω 和 n_Ω 与ε同数量级，因此联合周期与M的周期(公转周期)除以ε同数量级*．在月亮的情况下，ω和Ω的周期相应是9年和18年．长周期项的周期一般地与公转周期除以小参数ε同数量级，ε表示摄动函数的特性．

长周期项由 $\alpha = \delta = 0$ 的项对 t 积分而得．设在计算的第二步得到这个项，即其系数与ε同数量级．更准确地说，设在 $d\Omega/dt$ 方程中，长周期项以 $\varepsilon A\cos(\beta\bar{\omega} + \gamma\bar{\Omega})$ 的形式出现，则积分得出

$$\frac{\varepsilon A\sin(\beta\bar{\omega} + \gamma\bar{\Omega})}{\beta n_\omega + \gamma n_\Omega}, \tag{55}$$

而且 n_ω 和 n_Ω 本身与ε同数量级，所以Ω相应的项是ε零阶．

因此，我们可以看到，同样近似得到的长周期项总是比短周期项低一阶．因此，如果方程的解要算到ε^2，则长周期项要算到 ε^3(其系数可以同大多数二阶项的系数相比)．

---

* 英文版漏掉"除以 ε"，这里按法文版补上．——译者注

53. 解的级数的收敛性

在第41节我们已经看到，当 ε 足够小时，摄动函数的展开式收敛. 这同样适用于R的各种偏导数，所以也适用于包含密切根数的微分方程右端. 现在的问题是，是否同样适用于上述的解的级数.

几位作者，特别是邦加雷，已经研究了这个问题，可以定性地概述其工作如下：

从解的第一步(第51.b节)，积出的级数(49)和(50)的每一项都含有除数

$$D = \sum_{j} \alpha_j n_{j_0}, \quad j > 0.$$

其中，n_{j_0}(平运动)是只依赖于方程组初始条件的任意数，而 α_j 项是正、负整数或零，但不能全为零.

有无穷多种组合可使D如所想的接近于零. 因此，如果只有二个角变量，$D = \alpha_1 n_1 + \alpha_2$ (n_2 取为 1)，$-\alpha_1/\alpha_2$ 可取任何有理数(无穷多个数值). 进一步我们知道，不管 ε 等于什么数值，在 $n_2/n_1 - \varepsilon$ 和 $n_2/n_1 + \varepsilon$ 之间存在着无穷多个有理数.

因此，收敛的必要条件是系数 b 或 B 必须足够地小以补偿小分母. 可以指出存在着一个如所想望的接近于 n_1 的数 n'，使得不管 $B_{\alpha_1\alpha_2}$ 取什么样不为零的值，$B_{\alpha_1\alpha_2}/(\alpha_1 n_1 + \alpha_2)$ 都是无界的. 因为由观测给出的 n 值不是无限精确的，我们总是可以找到一个很好地代表观测的数 n'，对于 n' 级数中至少有一项是无界的.

但是，我们可以在同样的区间选择另一个 n''，对于 n'' 级数一致收敛. 事实上，从达朗贝尔性质可得出，系数 $B_{\alpha_1\alpha_2}$ 是这样的：

$$|B_{\alpha_1\alpha_2}| < Ke^{\alpha_1}e'^{\alpha_2},$$

其中，e 和 e' 小于 1，K 是有限数．现在，我们令 $n''=\sqrt{p/q}$，其中 p 和 q 是两个互素整数，使得 pq 不是完全平方．我们总是能够选择到 p 和 q，使 n'' 如所想望的接近于 n，则得

$$\left|\frac{1}{\alpha_1 n-\alpha_2}\right| = \left|\frac{\alpha_1 n+\alpha_2}{\alpha_1^2 n^2-\alpha_2^2}\right|$$

$$=\left|\frac{(\alpha_1 n+\alpha_2)q}{p\alpha_1^2-q\alpha_2^2}\right| < q(|\alpha_1|n+|\alpha_2|).$$

因为分母是一个非零整数，因此

$$\left|\frac{B_{\alpha_1\alpha_2}}{D}\right| < Kq(|\alpha_1|n+|\alpha_2|)e^{\alpha_1}e'^{\alpha_2}.$$

从通项为 $e^{\alpha_1}e'^{\alpha_2}$ 的级数得到的通项为 $\alpha_1 e^{\alpha_1}e'^{\alpha_2}$ 或 $\alpha_2 e^{\alpha_1}e'^{\alpha_2}$ 的级数收敛，因此我们讨论的级数绝对收敛和一致收敛．

所以，在保持观测精度的范围内，总能保证级数 (49) 和 (50) 收敛．

上述结果表明，这些级数对于积分常数取连续集合中的值时不收敛，因为取值的区间将包括 n 等于 n' 或 n'' 的值．

这种情况类似于近似后得到的最后形式解 (51) 和 (52) 的收敛性：每次近似的收敛是先前的近似的收敛的函数．

如果我们以级数必须对摄动函数的小参数的整个区域收敛作为进一步的条件，则已表明一般地级数发散．但是，我们的问题并不是解决所有的情况．

备注：

对于完整的形式级数的收敛性问题并没有重大的实际意义．用积分常数的数值和参数计算有限的表达式是足够的，这种表达式与解的差 η 在有限的时间间隔内可以达到所要求的小量．邦加雷已经指出这是可能的．

第五章 人造卫星的运动

上一章介绍了摄动函数展开的一般方法和形式解的构成，根据德洛勒-狄西朗定理，形式解是以傅里叶级数的形式表示的，级数中具有几个与时间有关的线性参量和常系数，或者还有一个时间的线性函数．值得注意的是，虽然这些级数通常是发散的和被截断，却仍然可以在有限的时间间隔 Δt 内作为解的一种表达式．

本章我们将应用柴倍耳所描述的方法对一个简单的实例求解．这个方法可以迅速地得到解．但是必须注意，也可应用其他任何一种方法．特别地以后将要表明，最后一章介绍的方法给出了相同的结果．

最后，在特殊情况下碰到使形式级数发散的小分母的问题，我们将看到怎样才能克服这种困难．

这里，我们尝试给出天体力学理论的一个实例，并研究一些经常碰到的困难，而不想得出所提出的问题的完整解．所介绍的方法显然也可用于比较复杂的情况，包括三体或多体的运动．但是，这种方法绝不是唯一的方法；在天体力学中，每种特殊情况都形成一种特殊的问题．

54. 刚体的引力位

考察一个有限体积 V 的刚体，在刚体内坐标为 ξ,η,ζ 的任意点的密度为 $K(\xi,\eta,\zeta)$． 设刚体外有一个单位质量的质点 P，其坐标为 x,y,z．

根据牛顿定律，刚体的每一个体元 Ω 吸引 P 点的力为

$$d\mathbf{F}=-kK(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta\,\frac{\mathbf{QP}}{QP^3}.$$

$d\mathbf{F}$ 的三个分量是引力位

$$dU=k\frac{K(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\quad（参看第七节）$$

的偏导数.

体元 Q 的总体对 P 点的吸引力为

$$\mathbf{F}=\iiint\limits_{(V)}d\mathbf{F},$$

$\mathbf{F}$ 的三个分量又是引力位

$$U=k\iiint\limits_{(V)}\frac{K(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\tag{1}$$

的偏导数.

积分是对整个刚体的体积进行的，因此，引力位 U 只是 x，y 和 z 的函数.

描述受到这种引力位作用的点 $P(x,y,z)$ 的运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}.\tag{2}$$

备注:

除了在这里我们处理的不是 n 个离散的天体，而是单个天体的体元的集合之外，这些公式与第一章的(11)式相同.

55. 引力位的展开式

设 r 是 P 点离开原点 O 的距离（$r^2=x^2+y^2+z^2$），ρ 是刚体的质点 Q 离开 O 的距离（$\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$），$S$ 是角 (OP,OQ)，Δ 是距离 PQ.

我们有

$$\Delta^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$
$$= r^2 - 2r\rho\cos S + \rho^2,$$

而从第 45 节有

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\rho}{r}P_1(\cos S) + \frac{\rho^2}{r^2}P_2(\cos S) + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{\rho^n}{r^n}P_n(\cos S) + \cdots \right],$$

其中，$P_n(\cos S)$ 是 n 阶勒让德多项式.

因此

$$U = \frac{k}{r}\iiint\limits_{(V)} K(\xi, \eta, \zeta)d\xi d\eta d\zeta$$
$$\times\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^j P_j(\cos S)\right],$$

把 U 写成

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_j + \cdots,$$

则有:

(a) $U_0 = \frac{k}{r}\iiint\limits_{(V)} K(\xi, \eta, \zeta)d\xi d\eta d\zeta = \frac{k}{r}\int_{(V)} dM,$

而上面质量元对整个刚体的积分就等于刚体的质量，故得

$$U_0 = kM/r. \tag{3}$$

(b) 应用同样的简化符号，有

$$U_1 = \frac{k}{r}\int_{(V)}\frac{\rho}{r}\cos S dM.$$

现在

$$\cos S = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{\rho r},$$

因此

$$U_1 = \frac{k}{r^2}\int_{(V)}(x\xi + y\eta + z\zeta)dM$$

$$= \frac{k}{r^2}\left[x\int_V \xi dM + y\int_V \eta dM + z\int_V \zeta dM\right].$$

如果原点位于刚体的引力中心，按定义上式的三个积分均为零．因此以后将假设情况就是这样，则

$$U_1 = 0. \qquad (4)$$

(c)

$$U_2 = \frac{k}{r}\int_V \frac{\rho^2}{r^2}\left[\frac{3}{2}\cos^2 S - \frac{1}{2}\right]dM$$

$$= \frac{k}{r^3}\int_V \frac{1}{2}\left[3\frac{(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{r^2} - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\right]dM$$

$$= \frac{k}{r^3}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)\int_V \xi^2 dM + \left(\frac{3}{2}\frac{y^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)\int_V \eta^2 dM\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{2}\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{2}\right)\int_V \zeta^2 dM\right]$$

$$+ \frac{3k}{r^5}\left[xy\int_V \xi\eta dM + yz\int_V \eta\zeta dM + zx\int_V \zeta\xi dM\right].$$

可以回忆起，根据定义，A，B，C 是惯量矩：

$$A = \int_V (\eta^2 + \zeta^2)dM, \cdots$$

D，E，F 是惯量积：

$$D = \int_V \eta\zeta dM, \cdots$$

如果我们假设坐标轴是刚体的主惯量轴，则

$$D = E = F = 0,$$

而且

$$A + B + C = 2\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)dM,$$

因此

$$\int \xi^2 dM = \frac{A + B + C}{2} - A.$$

于是我们得到

$$U_2 = \frac{k}{r^3}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{A+B+C}{2}-A\right)\right.$$

$$+\left(\frac{3}{2}\frac{y^2}{r^2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{A+B+C}{2}-B\right)$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}\frac{z^2}{r^2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{A+B+C}{2}-C\right)\right],$$

$$U_2 = \frac{k}{r^3}\left[\frac{1}{2}(A+B+C)-\frac{3}{2}\left(\frac{Ax^2+By^2+Cz^2}{r^2}\right)\right].$$

化为极坐标(经度 θ 和纬度 φ):

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\cos\varphi,\quad z = r\sin\varphi.$$

经过一些简单的运算后,得

$$U_2 = \frac{k}{r^3}\left[\left(C-\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sin^2\varphi\right)\right.$$

$$\left.-\frac{3}{4}(A-B)\cos^2\varphi\cos 2\theta\right]. \tag{5}$$

如果我们进一步假设此刚体对于 $O\zeta$ 轴为旋转对称,则有 $A=B$,而

$$U_2 = \frac{k}{r^3}(C-A)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sin^2\varphi\right).$$

注意到我们再一次碰到勒让德多项式 $P_2(\sin\varphi)$.

对于地球,$\frac{3}{2}(C-A)/Ma_e^2 = J$ 是一个地球物理和大地测量的基本量,其中 a_e 是地球的赤道半径,M是地球的质量,而 A, C 是地球的主惯量矩. J 与地球的扁率 ε 有关.

令 $J_2 = \frac{2}{3}Ja_e^2$[1],而

---

1) 本书写成后,一般的趋向是令 $J_2 = -\frac{2}{3}J$. 所以,如果取 $a_e = 1$,则本章给出的公式与通常的定义是一致的.

$$U_2 = \frac{kM}{r^3} J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right).$$

(d) U_2 以后的量的计算按类似的方式进行．但是，如果我们假设刚体对赤道平面对称，则奇阶引力位为零．旋转刚体的引力位可表为

$$U = \frac{kM}{r} \left[1 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{r} \right)^4 J_4 \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \sin^2 \varphi + \frac{35}{8} \sin^4 \varphi \right) + \cdots \right], \qquad (6)$$

其普遍形式为

$$U = \frac{kM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} J_{2n} P_{2n} (\sin \varphi) \right]. \qquad (7)$$

其中，J_{2n} 是 $2n$ 阶勒让德多项式 P_{2n} 的数值系数．

56. 近于球体的情况

球对称物体的特点是，三个主惯量矩相等和三个主惯量轴是该物体的任意三个互相垂直的轴．因此，$J_2 = 0$．可以指出，所有的 J_{2n} 也均为零．然而，这个重要的事实可以迅速地得到证明．

我们可以把球对称物体看成是由无限多个半径为 R、密度均匀、无限薄的同心（中心在 O）球壳所组成．

设 σ 是球壳的面密度，则球壳的质量为 $m = 4\pi R^2 \sigma$．

我们来计算球壳对 P 点的引力位．设 r 是 O 到 P 的距离（图 8），考察由角 α 和 $\alpha + d\alpha$ 所确定的二个圆之间的圆环元，其表面积为

$$dS = 2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha.$$

在 P 点，其引力位为

$$dU = \frac{k\sigma dS}{\rho}.$$

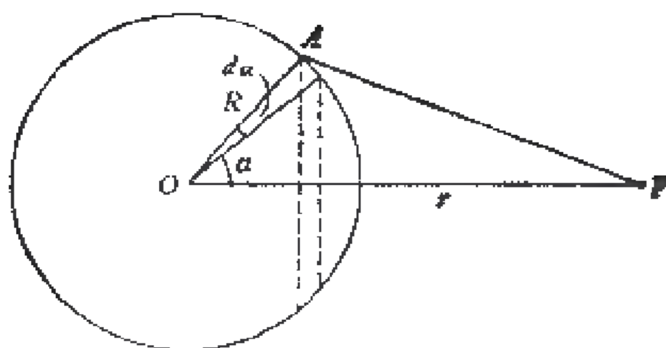


图 8

在三角形 OAP 中：

$$\rho^2 = r^2 + R^2 - 2Rr\cos\alpha.$$

因此，

$$dU = \frac{2k\pi R^2\sigma \sin\alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\alpha}},$$

$$U = 2k\pi R^2\sigma \int_0^\pi \frac{\sin\alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\alpha}}.$$

积分号下的量正好是一个微分，而

$$U = \frac{2k\pi R\sigma}{r}\left[\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\alpha}\right]_0^\pi$$

如果 P 点位于球壳之外，方括弧内的表达式有极值 $r + R$ 和 $r - R$，所以

$$U = \frac{4k\pi R^2\sigma}{r} = \frac{km}{r}.$$

均匀球壳对外面一点的引力位就好像整个球壳的质量都集中在球壳的中心，因而引力也是这样，把组成球对称物体的所有同心球壳的作用都叠加起来，得到下面的重要结论：

球对称物体的作用就好像它的全部质量都集中在球心。所以，其引力位为

$$U = \frac{kM}{r}. \tag{8}$$

备注：

上述证明也可以得出均匀球壳内的引力位是常数．在本书中没有进一步应用这个结果．

(8) 式对于近球体的情况是不精确的，但相差不大，因此(7)式中的 $J_2, J_4, \cdots, J_{2n}$ 是小量．如果 r 递增，则改正项的作用按 $1/r^{2n}$ 的比例递减．为此，在近球体(如行星)的运动的研究中，可以忽略这些改正项，并假定这些天体的作用就好像它们的全部质量都集中在它们的引力中心一样（第5节）．

57. 人造卫星的运动方程

自然天体之间的距离与其大小相比大得多，可以应用上节的结果；但是，与自然天体的情况相反，人造地球卫星离开地球是如此地近，以致于地球位函数的二次项不再能忽略．对于某些自然卫星(火卫1，火卫2，木卫5等)也遇到同样的情况，也受到这种类型的相当大的摄动．但是，自然卫星的运动的观测是如此地不精确，采用很近似的理论已足于算出观测到的差异．相反，人造地球卫星的观测精度要比自然卫星高几个数量级，为此，从第一批人造地球卫星上天以来，人造卫星在近球体的引力场中运动的研究特别迅猛地发展．

因此，如果作用在卫星上的力是由引力场引起的，它仅仅依赖于地球的位函数 U(7)式，则运动方程由 (2) 式给出：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{9}$$

当然，可以应用第三章的结果．上面的方程组等价于下列德洛勒方程组[或等价于拉格朗日方程(第32节(45)式方程组)]：

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial l},\quad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial g},\quad \frac{dH}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial h},$$
$$\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial\phi}{\partial L},\quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial\phi}{\partial G},\quad \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial\phi}{\partial H}. \tag{10}$$

其中

$$\phi=\frac{\mu}{2a}+R,$$

$$R=U-\frac{kM}{r}.$$

但是，除了受到地球引力之外，人造卫星也受到月亮和太阳的摄动以及与高层大气摩擦所产生的阻尼．大气阻尼效应随着卫星高度的减低而增大．这种力是很难分析的，因为大气密度依赖于温度、照度和太阳活动等因素．人造卫星也受到太阳光压的影响，其作用与卫星的面积质量比（卫星受太阳光照射的面积与卫星质量之比）S/M 成正比，因此有时是很重要的．虽然太阳光压也作用在太阳系其他天体上，但由于 S/M 极小而可忽略． 最后，人造卫星的轨道还受到电磁效应、流星的碰撞等的摄动，其作用可以约略地进行预计．

下面，我们只讨论地球引力位（高卫星轨道的摄动的主要因素）的作用． 详细研究这种运动可以使我们探讨天体力学中碰到的其他大部分问题所采用的方法．在适当的地方，我们将指出表征这些主要问题的最重要的差异．

58. 柴倍耳方法的原理

利用母函数，经过一系列变量变换后，可以解出方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dL}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial l},\quad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial g},\quad \frac{dH}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial h},\\&\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial\phi}{\partial L},\quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial\phi}{\partial G},\quad \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial\phi}{\partial H}.\end{aligned}\right\}(11)$$

其中，ϕ 是六个德洛纳变量的函数.

把第 23 节的结果应用到方程组(11). 我们知道，如果我们考虑一组新变量 L', G', H', l', g', h' 和母函数 $S(L', G', H', l, g, h)$，使

$$L = \frac{\partial S}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S}{\partial g}, \quad H = \frac{\partial S}{\partial h},$$

$$l' = \frac{\partial S}{\partial L'}, \quad g' = \frac{\partial S}{\partial G'}, \quad h' = \frac{\partial S}{\partial H'}, \tag{12}$$

则新方程组是正则的，而表为新变量的新哈密顿函数 ϕ' 是不变的.

因此，

$$\phi(L, G, H, l, g, h) = \phi'(L', G', H', l', g', h'), \tag{13}$$

而

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL'}{dt} = \frac{\partial \phi'}{\partial l'}, \quad \frac{dG'}{dt} = \frac{\partial \phi'}{\partial g'}, \quad \frac{dH'}{dt} = \frac{\partial \phi'}{\partial h'}, \\ \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial \phi'}{\partial L'}, \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial \phi'}{\partial G'}, \quad \frac{dh'}{dt} = -\frac{\partial \phi'}{\partial H'}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由于 S 是任意的函数，故可加上一定的条件. 在本节将要论述的由柴倍耳引人并经勃劳威尔发展的方法中，此条件是 ϕ' 与一个角变量无关而 ϕ 却依赖于这个角变量. 如果这个条件能够满足的话(我们将证明这是可能的)，则我们将从哈密顿函数中消去一个角变量. 如果重复这种运算几次，则可从 ϕ 中一个一个地消去所有的角变量，最后的哈密顿函数 ϕ'' 只是 L'', G'' 和 H'' 的函数.

最后方程组的前三个方程

$$\frac{dL''}{dt} = \frac{\partial \phi''}{\partial l''}, \quad \frac{dG''}{dt} = \frac{\partial \phi''}{\partial g''}, \quad \frac{dH''}{dt} = \frac{\partial \phi''}{\partial h''}$$

的右端为零，从而得到 L'', G'' 和 H'' 为常数的解. 把这

些常数值代回到 $\partial\phi''/\partial L''$, $\partial\phi''/\partial G''$ 和 $\partial\phi''/\partial H''$ 中，得到 dl''/dt, dg''/dt 和 dh''/dt 是常数，故 l'', g'' 和 h'' 的解是时间的线性函数.

利用定义各个中间变量的(12)型的各种方程，逐步回推，则可得到初始变量 L, G, H, l, g 和 h 的解.

59. 方程的建立

现在我们来考虑给出方程(9)的解的运算. 为了减少代数计算的工作量，我们限于讨论 U 的展开式的第一项，即

$$R = U_2 = \frac{\mu}{r^3} J_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right). \quad (\mu = kM)$$

加上更多的项并没有使方法有任何本质的差别.

在方程组(11)中，ϕ 被表为德洛纳变量的函数. 我们并不准备把这个步骤弄完整，利用上一章所介绍的关于摄动函数展开的方法可以达到这个目的.

我们有

$$\phi = \frac{\mu}{2a} + \frac{\mu}{r^3} J_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right).$$

在轨道平面、赤道平面和通过卫星的子午平面所确定的球面三角中(图9)，

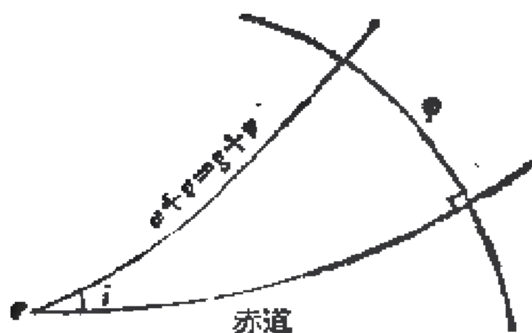


图 9

$$\sin\varphi = \sin i \sin(g+v),$$

其中 v 是真近点角.

所以

$$\sin^2\varphi = \sin^2 i \frac{1-\cos(2g+2v)}{2}.$$

现在,从第 30 节 (42) 式,

$$\cos i = G/H, \qquad \sqrt{a} = \frac{L}{\sqrt{\mu}},$$

由此

$$\phi = \frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^4 J_2}{L^6}\left[\frac{a^3}{r^3}\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2}\right)\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2v)\right]. \qquad (15)$$

注意,现在 ϕ 中不含 h.

利用第 40 节中给出的对于二体问题函数的展开有效的方法,可把 a^3/r^3 和 $a^3/r^3\cos(2g+2v)$ 表为 e, g 和 l 的函数. 由于 $e=\sqrt{1-(G^2/L^2)}$, 于是 ϕ 被表为德洛勒变量的函数. 设 e^4 是小量而略去,得

$$a^3/r^3 = 1+\frac{3e^2}{2}+\left(3e+\frac{27}{8}e^3\right)\cos l$$

$$+\frac{9}{2}e^2\cos 2l+\frac{53}{8}e^3\cos 3l$$

$$\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2v) = \frac{e^3}{48}\cos(2g-l)$$

$$+\left(-\frac{e}{2}+\frac{1}{16}e^3\right)\cos(2g+l)$$

$$+\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\cos(2g+2l)$$

$$+\left(\frac{7}{2}e-\frac{123}{16}e^3\right)\cos(2g+3l)$$

$$+\frac{17}{2}e^2\cos(2g+4l)+\frac{845}{48}e^3\cos(2g+5l).$$

下面直接计算两个特别重要的量:

(a) a^3/r^3 展开式中的常数项是 L^3/G^3. 根据傅里叶定理(第35节),此项为

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a^3/r^3dM.$$

现在,从面积定律

$$r^2\frac{dv}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}=G,$$

而

$$\frac{dM}{dt}=n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}=\frac{L}{a^2},$$

所以

$$\frac{r^2}{a^2}\frac{dv}{dM}=\frac{G}{L},$$

并且

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a}{r}\times\frac{L}{G}dv=\frac{1}{2\pi}\frac{L^3}{G^3}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)dv$$

$$=\frac{L^3}{G^3}=(1-e^2)^{-3/2}.$$

(b) $\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2v)$ 的展开式中 $\cos 2g$ 项为零.

根据傅里叶定理,此项为

$$C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2v)dM$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{L}{G}\frac{a}{r}\cos(2g+2v)dv$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{L^3}{G^3}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)\cos(2g+2v)dv=0.$$

60. 平近点角的消去法

按照第 58 节简略介绍的方法，我们来确定母函数 S 和不显含新变量 l' 的新哈密顿函数 ϕ'. 设 J_2 是小量，根据邦加雷定理(第 48 节和第 49 节)，我们来寻求可展成关于 J_2 的完全级数解. 设 S 和 ϕ' 也能以同样的形式展开.

令
$$\phi = \phi_0 + \phi_1,$$
下标表示该项关于 J_2 的幂次，所以

$$\phi_0 = \mu^2/2L^2,$$

$$\phi_1 = \frac{\mu^4 J_2}{L^6}\left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2}\right)\frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2}\right)\frac{a^3}{r^3}\cos(2g + 2v)\right].$$

同样

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi'_0 + \phi'_1 + \phi'_2 + \cdots, \\ S &= S_0 + S_1 + S_2 + \cdots. \end{aligned} \tag{16}$$

对此变换的一个要求是，当略去 J_2 时，变换的结果是保持变量恒等不变. 所以，我们取 $S_0 = L'l + G'g + H'h$. 根据(12)式，有

$$L = \frac{\partial S}{\partial l} = L' + \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l} + \cdots,$$

$$l' = \frac{\partial S}{\partial L'} = l + \frac{\partial S_1}{\partial L'} + \frac{\partial S_2}{\partial L'} + \cdots,$$

$$G = \frac{\partial S}{\partial g} = G' + \frac{\partial S_1}{\partial g} + \frac{\partial S_2}{\partial g} + \cdots,$$

$$g' = \frac{\partial S}{\partial G'} = g + \frac{\partial S_1}{\partial G'} + \frac{\partial S_2}{\partial G'} + \cdots,$$

$$H = \frac{\partial S}{\partial h} = H' + \frac{\partial S_1}{\partial h} + \frac{\partial S_2}{\partial h} + \cdots,$$

$$h' = \frac{\partial S}{\partial H'} = h + \frac{\partial S_1}{\partial H'} + \frac{\partial S_2}{\partial H'} + \cdots. \qquad (17)$$

ϕ 等于 ϕ' (第 58 节 (13) 式)给出

$$\begin{aligned}\phi_0(L) + \phi_1(L, G, H, l, g, -) = \phi_0' \\ + \phi_1'(L', G', H', -, g', -) \\ + \phi_2'(L', G', H', -, g', -) + \cdots,\end{aligned}$$

其中，长划表示不存在的变量，而 ϕ' 不再依赖于 l'. 由于 ϕ_1 已不依赖于 h，因此，我们尽力找出只依赖于 g' 的 ϕ'.

把式中的 L, G, H, l', g' 和 h' 表为 S 的函数，得

$$\begin{aligned}\phi_0\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right) + \phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g}, \frac{\partial S}{\partial h}, l, g, -\right) \\ = \phi_0' + \phi_1'\left(L', G', H', -, \frac{\partial S}{\partial G'}, -\right) \\ + \phi_2'\left(L', G', H', -, \frac{\partial S}{\partial G'}, -\right) + \cdots.\end{aligned}$$

把 S 的偏导数用它们关于 J_2 的展开式代替，并只取展开式的有限项，例如取到 J_2^2 项，则有

$$\begin{aligned}\phi_0\left(L' + \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l}\right) \\ + \phi_1\left(L' + \frac{\partial S_1}{\partial l}, G' + \frac{\partial S_1}{\partial g}, H' + \frac{\partial S_1}{\partial h}, l, g, -\right) \\ = \phi_0' + \phi_1'\left(L', G', H', -, g + \frac{\partial S_1}{\partial G'}, -\right) \\ + \phi_2'(L', G', H', -, g, -),\end{aligned}$$

展成泰勒级数得

$$\begin{aligned}\phi_0(L') + \frac{\partial \phi_0}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial \phi_0}{\partial L'}\frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2 \\ + \phi_1(L', G', H', -, g, -) + \frac{\partial \phi_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial\phi_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g}+\frac{\partial\phi_1}{\partial H'}\frac{\partial S_1}{\partial h}$$

$$=\phi_0'+\phi_1'(L', G', H', -, g, -)$$

$$+\frac{\partial\phi_1}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G'}+\phi_2'(L', G', H', -, g, -).$$

对上式加以整理，并令两端 J_2 同阶的项相等，得

(a) $\phi_0'=\phi_0(L')$,

(b) $\phi_1'(L', G', H', -, g, -)=\frac{\partial\phi_0}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}$

$$+\phi_1(L', G', H', l, g, -),$$

(c) $$\phi_2'+\frac{\partial\phi_1}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G'}=\frac{\partial\phi_0}{\partial L'}\frac{\partial S_2}{\partial l}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2 \quad (18)$$

$$+\frac{\partial\phi_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial\phi_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g}+\frac{\partial\phi_1}{\partial H}\frac{\partial S_1}{\partial h}.$$

第一个方程 (*a*) 给出

$$\phi_0'=\mu^2/2L'^2.$$

第二个方程 (*b*) 可分成两步处理．我们知道，按 l 展开的 ϕ_1 只有一项不依赖于 l，并且不包含 $\cos 2g$ 的项．把与 l 无关的唯一项 ϕ_{1S} 分离出来，写成

$$\phi_1=\frac{\mu^4 J_2}{L'^6}\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\frac{L'^3}{G'^3}+\phi_{1p}=\phi_{1S}+\phi_{1p}.$$

(下标 S 和 P 分别表示长期性和周期性)

现在，设 S 只是通过三角项依赖于 l（其形式类似 F 解的三角项），在这种情况下，$\frac{\partial S_1}{\partial l}$ 没有常数项，故可把方程(*b*)一分为二，于是得到包含 l 项的方程为

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\phi_{1p}(L', G', H', l, g, -)=0,$$

而另一个只包含长期项的方程为

$$\phi_1'(L', G', H', -, g, -) = \phi_{1S}(L', G', H', -, g, -)$$
$$= \frac{\mu^4 J_2}{L'^3 G'^3}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right). \qquad (19)$$

第二个方程确定了 ϕ_1'，而由于

$$\partial\phi_0/\partial L' = -\mu^2/L'^3,$$

第一个方程给出

$$\frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{L'^3}{\mu^2}\phi_{1p}(L', G', H', l, g, -)$$

和

$$S_1 = \int \frac{L'^3}{\mu^2}\phi_{1p}(L', G', H', l, g, -)dl. \qquad (20)$$

这样，我们得到了 S_1（不依赖于 h）和 ϕ_1'（不依赖于 l' 和 h'）. 把它们代入(18 c)，然后分别地令方程二端含 l 的项和不含 l 的项相等，则可求得 S_2 和 ϕ_2'. 如果我们把得到(18)式的关于 J_2 的展开继续下去，则可求得 S 和 ϕ' 的更高阶项. 最后，哈密顿函数 ϕ_2' 依赖于 g'，但不再依赖于 l' 和 h'.

61. S_1 的显函数式

显然，要进行（17）式的变量变换，必须写出 S 的显函数式. 为此，我们只要推算出由（20）式所定义的 S_1 就行了.

从上节我们已经得到

$$\phi_{1S} = \frac{\mu^4 J_2}{L'^6}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\frac{L'^3}{G'^3},$$

由此应用（15）式有

$$\phi_{1p}(L', G', H', l, g, -)$$
$$= \frac{\mu^4 J_2}{L'^6}\left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\left(\frac{a'^3}{r'^3} - \frac{L'^3}{G'^3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\frac{a'^3}{r'^3}\cos(2g + 2v')\right],$$

其中，a'，r' 和 v' 是已知的椭圆运动函数，表为度量根数 L'，G' 和角度根数 l 的函数．已知

$$dl = n'dt = \frac{r'^2}{a'^2\sqrt{1-e'^2}}dv' = \frac{L'}{G'}\frac{r'^2}{a'^2}dv',$$

我们必须计算

$$\int\left(\frac{a'^3}{r'^3} - \frac{L'^3}{G'^3}\right)dl = \frac{-L'^3}{G'^3}\cdot l + \frac{L'^3}{G'^3}\int(1+e'\cos v')dv'$$

$$= \frac{L'^3}{G'^3}(v' - l + e'\sin v'),$$

同样地处理其他的表达式，则可得

$$S_1 = \frac{\mu^2 J_2}{G'^3}\left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)(v'-l+e'\sin v')\right.$$

$$+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\left(\frac{1}{2}\sin(2g+2v')\right.$$

$$\left.\left.+\frac{e'}{2}\sin(2g+v')+\frac{e'}{6}\sin(2g+3v')\right)\right]. \quad (21)$$

其中，v' 是根数为 L'，G' 和 l 的椭圆上的真近点角．这样定义的 (17) 式变量变换只包含到 J_2 项，还包含 J_2^2 项的计算当然是比较复杂的．我们还注意到 $\partial S_1/\partial h = 0$，因此，$H' = H$．

62. ϕ_2' 的计算

已知 S_1，则可从(18 c)中分离出与 l 无关的项．现在，我们把(21)式展成 l 的函数．但是，借助于傅里叶定理(参看第59节)，我们也可直接完成计算，并找出与 l 无关的项．然而，这种计算过于冗长，在这里我们不再写出．

我们求得

$$\phi_2' = \frac{\mu^6 J_2^2}{L'^{10}}\left[\frac{15}{128}\frac{L'^5}{G'^5}\left(1-\frac{18}{5}\frac{H'^2}{G'^2}+\frac{H'^4}{G'^4}\right)\right.$$

$$+\frac{3}{32}\frac{L'^6}{G'^6}\left(1-6\frac{H'^2}{G'^2}+9\frac{H'^4}{G'^4}\right)$$
$$-\frac{15}{128}\frac{L'^7}{G'^7}\left(1-2\frac{H'^2}{G'^2}+9\frac{H'^4}{G'^4}\right)$$
$$-\frac{3}{64}\left(\frac{L'^5}{G'^5}-\frac{L'^7}{G'^7}\right)\left(1-16\frac{H'^2}{G'^2}+15\frac{H'^4}{G'^4}\right)\cos 2g'\Bigg]$$
$$=\phi'_{2S}+\phi'_{2P}. \tag{22}$$

其中，ϕ'_{2P} 包含 $\cos 2g'$ 项，而 ϕ'_{2S} 包含与 g' 无关的项

63. g 的消去法

这样，我们已经把方程组化成正则方程组 (14)，其哈密顿函数由下式给出：

$$\phi'=\phi'_0+\phi'_1+\phi'_{2S}+\phi'_{2P}.$$

其中，只有 ϕ'_{2P} 依赖于 g'，其他项只依赖于 L'，G' 和 H'。

现在我们应用母函数 S' 进行另一次正则变换：

$$L',G',H',l',g',h'\rightarrow L'',G'',H'',l'',g'',h'',$$

同样有

$$S'=L''l'+G''g'+H''h'+S'_1(L'',G'',H'',g')+\cdots.$$

如同在第一次近似中对 h 的那样，可以证明 S' 与 l 无关；

$$L'=\frac{\partial S'}{\partial l'}=L'',\qquad G'=\frac{\partial S'}{\partial g'}=G''+\frac{\partial S'_1}{\partial g'}+\cdots,$$
$$H'=\frac{\partial S'}{\partial h'}=H'',\qquad l''=\frac{\partial S'}{\partial L''}=l'+\frac{\partial S'_1}{\partial L''}+\cdots,$$
$$g''=\frac{\partial S'}{\partial G''}=g+\frac{\partial S'_1}{\partial G''}+\cdots, \tag{23}$$
$$h''=\frac{\partial S'}{\partial H''}=h'+\frac{\partial S'_1}{\partial H''}+\cdots.$$

新哈密顿函数 $\phi''=\phi''_0+\phi''_1+\phi''_2+\cdots$ 与 l''，g'' 和

h'' 无关。ϕ'' 与 ϕ' 恒等得出

$$\phi_0'' + \phi_1'' + \phi_2''$$
$$= \phi_0' + \phi_1'\left(L'', G'' + \frac{\partial S_1'}{\partial g'}, H''\right) + \phi_{2S}' + \phi_{2P}'. \qquad (24)$$

这里，我们截断于 J_2^2 项。由此得出下列方程：

$$\phi_0'' = \phi_0'(L''),$$
$$\phi_1'' = \phi_1'(L'', G'', H''),$$
$$\phi_2'' = \frac{\partial \phi_1'}{\partial G''}\frac{\partial S_1'}{\partial g'} + \phi_{2S}' + \phi_{2P}'.$$

最后的式子简化成二个方程：其一是与 g' 无关的项

$$\phi_2'' = \phi_{2S}',$$

其二是依赖于 g' 的项

$$\frac{\partial \phi_1'}{\partial G''}\frac{\partial S_1'}{\partial g'} + \phi_{2P}' = 0.$$

这个方程定义 S_1'：

$$S_1' = \int \frac{-\phi_{2P}'(L'', G'', H'', -, g', -)}{\partial \phi_1'/\partial G''} dg'.$$

应用（19）式和（22）式，我们得出

$$S_1' = \frac{\mu^2 J_2}{32 L''^2 G''} \frac{\left(1 - \frac{L''^2}{G''^2}\right)\left(1 - 16\frac{H''^2}{G''^2} + 15\frac{H''^4}{G''^4}\right)}{\left(1 - 5\frac{H''^2}{G''^2}\right)} \sin 2g'. \qquad (25)$$

利用母函数 S' 和方程（23）所定义的新变量，我们得到下列正则方程组：

$$\frac{dL''}{dt} = \frac{\partial \phi''}{\partial l''}, \quad \frac{dG''}{dt} = \frac{\partial \phi''}{\partial g}, \quad \frac{dH''}{dt} = \frac{\partial \phi''}{\partial h''},$$

$$\frac{dl''}{dt} = -\frac{\partial \phi''}{\partial L''}, \quad \frac{dg''}{dt} = -\frac{\partial \phi''}{\partial G''}, \quad \frac{dh''}{dt} = -\frac{\partial \phi''}{\partial H''}.$$

其中，$\phi'' = \phi_0'' + \phi_1'' + \phi_2'' + \cdots$. 现在 ϕ'' 只依赖于 L''，G'' 和 H''，而且 $\partial\phi''/\partial l''$，$\partial\phi''/\partial g''$ 和 $\partial\phi''/\partial h''$ 为零，所以 L''，G'' 和 H'' 是常数。

最后三个方程的右端也是常数，积出的 l''，g''，和 h'' 是时间的线性函数。因此，问题的完全解的形式如下：

$$L'' = L_0,\ G'' = G_0,\ H'' = H_0,$$

$$l'' = n_l(t - t_0),\quad g'' = n_g(t - t_0),\quad h'' = n_h(t - t_0).$$

由(17)式和(23)式，可以化回到初始的变量 L，G，H，l，g 和 h，并把其中的任一个变量表示为时间的函数。

64. 主要的结果：人造卫星的运动

略去 J_2^2，我们得到 l''，g'' 和 h'' 的简单表达式。在 ϕ'' 中保留下列的项已经足够：

$$\phi_0'' = \phi_0' = \phi_0 = \mu^2/2L''^2,$$

和

$$\phi_1'' = \phi_1' = \phi_{1S} = \frac{\mu^4 J_2}{L''^3 G''^3}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{H''^2}{G''^2}\right),$$

$$\frac{dl''}{dt} = -\frac{\partial\phi_0}{\partial L''} - \frac{\partial\phi_1''}{\partial L''}$$

$$= \frac{\mu^2}{L''^3} + \frac{3\mu^4 J_2}{L''^4 G''^3}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{H''^2}{G''^2}\right),$$

$$\frac{dl''}{dt} = n_0 + 3n_0\frac{J_2}{a_0^2} \times \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 i_0\right)(1 - e_0^2)^{-3/2}. \qquad (26)$$

如果 $n_0 = \mu^2/L_0^3$，而 e_0，a_0 和 i_0 是对应于常数 L_0，G_0 和 H_0 的椭圆根数值，则

$$\frac{dg''}{dt} = -\frac{\partial\phi_1''}{\partial G''} = \frac{-3\mu^4 J_2}{L''^3 G''^4}\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\frac{H''^2}{G''^2}\right)$$

$$= n_0 \frac{J_2}{a_0^2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{15}{4}\cos^2 i_0\right)\frac{1}{(1-e_0^2)^2}, \tag{27}$$

$$\frac{dh''}{dt} = -\frac{\partial \varphi_1''}{\partial H''} = \frac{-3\mu^4 J_2 H''}{2L''^3 G''^5}$$

$$= -\frac{n_0}{2}\frac{J_2}{a_0^2}\cos i_0 \times \frac{3}{(1-e_0^2)^2}. \tag{28}$$

化回到初始根数，得到下列形式的表达式：

$$l = l'' + l_L + l_C,\ g = g'' + g_L + g_C,\ h = h'' + h_L + h_C,$$

$$L = L'' + L_L + L_C,\ G = G'' + G_L + G_C,$$

$$H = H'' + H_L + H_C.$$

其中，第一项代表上述的解，下标 L 的项是长周期项，只有 g 包含在三角函数的引数里；下标 c 的项是短周期项，l'' 单独或与 g'' 一起包含在三角函数的引数里．因此，表达式（26）和（28）描述运动的长期部分．

方程（28）表明交点以

$$\frac{4\pi(1-e_0^2)^2 a_0^2}{3n_0 J_2 \cos i_0}$$

的周期逆行，

当倾角趋于零时，交点的逆行运动最快，而极轨道则不存在这种运动．小偏心率和大半长径的交点运动较慢．

对于倾角小于 $I_0(5\cos^2 I_0 - 1 = 0,\ I_0 = 63°26')$ 的卫星，近地点的运动是顺行的；而当倾角大于 I_0 时，则为逆行．

卫星的运动周期接近于 $2\pi/n_0$，即接近于地球为标准球体应有的周期值．倾角小于 $I_0'(3\cos^2 I_0' - 1 = 0,\ I_0' = 54°44')$ 的平运动较快，而倾角大于 I_0' 的平运动则较慢．

与第 51 节所说的一致，半长径、偏心率和倾角没有长期运动．从 ϕ_{2s}' 得到的 $\sin 2g''$ 或 $\cos 2g''$ 项（参看第 62 节）是长周期项，可以出现于所有的根数之中．但是，除了半长径之外，对于其他的根数都是 J_2 阶．这些是周期为近地点周

期一半的项，此外，还存在着 J_2 的高阶项，其周期等于近地点周期的四分之一，六分之一等.

短周期项使旋转的并受到长周期摄动的基本轨道变形.

备注:

这样，我们再一次看到在第 52 节所引人的长周期项、短周期项和长期项之间的区别，在太阳系大部分自然天体的运动理论中，也存在着这种区别.

65. 拉格朗日方程的应用；第一次近似

为了应用第 51 节给出的普遍摄动方法，我们现在将利用拉格朗日方程努力找出人造卫星根数的摄动，但只限于研究一次近似中出现的摄动.

以椭圆根数表示的摄动函数 R((15) 式)为

$$R = \frac{\mu J_2}{a^3}\left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 i\right)\frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos^2 i\right)\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2v)\right].$$

应用第 59 节中给出的展开式，再用根数 Ω, ω 和 M 表示，并略去 e^3，得

$$\begin{aligned} R = \frac{\mu J_2}{a^3}\Bigg\{&\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 i\right)\left(1+\frac{3e^2}{2}+3e\cos M + \frac{9}{2}e^2\cos 2M\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos^2 i\right) \\ &\times\Bigg[-\frac{e}{2}\cos(2\omega+M)+\left(1-\frac{5}{2}e^2\right) \times\cos(2\omega+2M) + \frac{7}{2}e\cos(2\omega+3M) \\ &+\frac{17}{2}e^2\cos(2\omega+4M)\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{29}$$

对于一次近似，根数 a, e, i, Ω 和 ω 是常数（克普勒运动），而 $M = n(t - t_0)$，$n^2a^3 = \mu$. 现在我们应用描述近地点运动的拉格朗日方程（第 34 节（45）式）：

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},$$

略去 e^2，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\mu J_2}{a^3}\Big\{&\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 i\right)(3e + 3\cos M + 9e\cos 2M)\\&+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos^2 i\right)\Big[-\frac{1}{2}\cos(2\omega + M)\\&-5e\cos(2\omega+2M) + \frac{7}{2}\cos(2\omega+3M)\\&+17e\cos(2\omega+4M)\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

我们可以用 1 代替 $\sqrt{1-e^2}$，而用 $1/na^2e$ 代替拉格朗日方程中 $\frac{\partial R}{\partial e}$ 的系数. 把系数同上式相乘，只留下 e^{-1} 项和常数，得

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\mu J_2}{na^5}\Big\{&\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 i\right)\\&\times\left(3+\frac{3}{e}\cos M + 9\cos 2M\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos^2 i\right)\\&\times\Big[-\frac{1}{2e}\cos(2\omega+M) - 5\cos(2\omega+2M)\\&+\frac{7}{2e}\cos(2\omega+3M) + 17\cos(2\omega+4M)\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

略去 e 项，我们同样可得

$$\frac{-\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} \doteq \frac{\mu J_2}{na^5}$$

$$\times \left[\frac{3}{2}\cos^2 i - \frac{3}{2}\cos^2 i \cos(2\omega + 2M)\right].$$

两式相加得

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu J_2}{na^5}\left\{-\frac{3}{4} + \frac{15}{4}\cos^2 i + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 i\right)\right.$$

$$\times \left(\frac{3}{e}\cos M + 9\cos 2M\right)$$

$$-\frac{3}{2}\cos^2 i \cos(2\omega + 2M)$$

$$+\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos^2 i\right)\left[-\frac{1}{2e}\cos(2\omega + M)\right.$$

$$-5\cos(2\omega + 2M) + \frac{7}{2e}$$

$$\left.\left.\times \cos(2\omega + 3M) + 17\cos(2\omega + 4M)\right]\right\}. \quad (30)$$

把二体问题的解

$$a = a_0,\ e = e_0,\ i = i_0,\ \omega = \omega_0,$$

和

$$M_0 = n_0(t - t_0),\ n_0^2 a_0^3 = \mu,$$

代入右端,然后进行积分,得*

$$\omega = \omega_0 + \frac{n_0 J_2}{a_0^2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{15}{4}\cos^2 i_0\right)t$$

$$+\left[\frac{J_2}{a_0^2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 i_0\right)\right.$$

$$\cdot\left(\frac{3}{e_0}\sin M_0 + \frac{9}{2}\sin 2M_0\right)$$

$$\times\left(-\frac{15}{8} + \frac{9}{8}\cos^2 i_0\right)\sin(2\omega_0 + 2M_0)$$

$$+\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos^2 i_0\right)\left(-\frac{1}{2e_0}\sin(2\omega_0 + M_0)\right.$$

* 此式英文本和法文本均有误,现予更正。——译者注

$$+\frac{7}{6e_0}\sin(2\omega_0+3M_0)$$

$$+\frac{17}{4}\sin(2\omega_0+4M_0)\Big)\Big].$$

这样，我们求得近地点长期运动的时间的系数表达式如下：

$$\frac{n_0J_2}{a_0^2}\left(-\frac{3}{4}+\frac{15}{4}\cos^2 i_0\right). \tag{31}$$

此式与上一节(27)式中略去 e_0 项(这里，已略去 e_0 项)的结果符合．这样，我们已经得到了许多短周期项，其中的一些项在分母中出现 e．我们以后将讨论由此推得的结论．我们将只是假定不去掉 e(但是，必须记住，我们已展开到 e^4，展开到 e 只不过是为了简化引数；事实上，一次近似的结果可以推广到所需要的任意阶)．

我们可以同样地表示其他拉格朗日方程的右端（参看第 34 节）．例如，表示出 $\frac{da}{dt}$，$\frac{de}{dt}$，$\frac{di}{dt}$ 和 $\frac{d\Omega}{dt}$ 方程的右端项，如上进行积分，则可得一次近似解．

正如第 51 节所述，必须把 $\frac{dM}{dt}$ 方程分开处理．事实上，我们有

$$\frac{dM}{dt}=n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},$$

其中 $n=\sqrt{\mu}\,a^{-3/2}$．

为了得到与其他根数变量相同形式的全部 M 项（即关于 J_2 的一阶长期项、长周期项和短周期项），必须考虑 n 的一阶摄动．所以，根据 a 的一次近似，首先计算

$$n=\sqrt{\mu}\,a^{-3/2},$$

略去 J_2^2，对于 a 我们得到

$$a = a_0\left[1 + \frac{J_2}{a_0^2}\sum_{j,k} A_{jk}\cos(j\omega + kM)\right].$$

因此，

$$a^{-3/2} = a_0^{-3/2}\left[1 + \frac{J_2}{a_0^2}\sum_{j,k} A_{jk}\cos(j\omega + kM)\right]^{-3/2}$$

$$\sqrt{\mu}\, a^{-3/2} = n_0 - \frac{3}{2} n_0 \frac{J_2}{a_0^2}$$

$$\times \sum_{j,k} A_{jk}\cos(j\omega + kM) + \cdots.$$

由此可见，dM/dt 是全都具有相同形式的下列三个级数的总和：

$$\sqrt{\mu}\, a^{-3/2},\quad \frac{-2}{na}\frac{\partial R}{\partial a},\quad -\frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

积分之后，M就与其他 5 个根数具有相同的形式.

66. 拉格朗日方程的第二次近似

为了得到二次近似，我们把一次近似得到的级数代入拉格朗日方程的右端．为此，我们应用展开的形式，如得到的 $d\omega/dt$ 展式[(30)式].

在二次近似的计算中，只保留 J_2 项和 J_2^2 项，而得到的 J_2 项与一次近似相同．在 J_2 项中没有单独包含 ω 的项，因为在摄动函数的展开式中没有 $\cos 2\omega$ 项．但是，在上述的二次近似叠代中，可能出现 $\cos 2\omega$ 或 $\sin 2\omega$ 项，事实上也出现了.

于是，我们得到 $d\omega/dt$ 的表达式如下：

$$d\omega/dt = J_2\omega_1' + J_2^2\omega_2' + J_2\sum_{i,j} A_{ij}\cos(i\omega + jM)$$

$$+ J_2^2\sum_{i,j} B_{ij}\cos(i\omega + jM). \tag{32}$$

其中，求和对所有的 j 值进行；在 A_{ij} 中，$i=0$ 或 2；在 B_{ij} 中，$i=0$，2 或 4；而且，$A_{20}=0$． ω_1'，ω_2'，A 和 B 是 a_0，e_0 和 i_0 的函数．

积分和一次近似同样地进行，但是此时由于结果要准到 J_2^2，我们不能忽略 ω 和 M 的 J_2 阶长期项． 设 $J_2\omega_1'$ 和 $n+J_2n_1'$ 是 ω 和 M 的一次近似解中时间的系数，则(32)的积分形式为

$$\omega-\omega_0=(J_2\omega_1'+J_2^2\omega_2')t+J_2\sum_{i,j}A_{ij}\frac{\sin(i\omega+jM)}{iJ_2\omega_1'+j(n+J_2n_1')}$$
$$+J_2^2\sum_{i,j}B_{ij}\frac{\sin(i\omega+jM)}{iJ_2\omega_1'+j(n+J_2n_1')}. \tag{33}$$

(a) 因为不存在 A_{00} 和 A_{20}，在第一个求和项的分母中，j 总是不为零；准确到 J_2^2，可以写成

$$\frac{1}{iJ_2\omega_1'+jn+jJ_2n_1'}=\frac{1}{jn}\left[1-\frac{J_2}{n}\left(\frac{i}{j}\omega_1'+n_1'\right)\right].$$

这样，第一个求和项就化成关于 J_2 的一阶项和其他具有同样形式的 J_2^2 项．

(b) 关于第二个求和形式的项，除了 $B_{2,0}$ 的项外 ($B_{0,0}$ 和 $B_{4,0}$ 为零)，我们可以忽略分母中的 J_2，并把 ω 当成常数和 $M=n(t-t_0)$ 进行积分．

另一方面，在 $B_{2,0}$ 的项中，除数变成 $2J_2\omega_1'$，积分之后，此项变成

$$\frac{J_2^2B_{20}}{2J_2\omega_1'}\cos 2\omega=\frac{J_2B_{20}}{2\omega_1'}\cos 2\omega,$$

这是一个一阶的项．

这样，我们得到一个在天体力学中对于若干问题是有效的重要结果：一阶长周期项只是在第二次近似中才出现．

所以，由此得出的结论是：在第二次近似中算出的二阶项是不完全的，它们是采用不完全的一阶项算出的．因此，把

方程写到二阶形式的叠代也是不完全的． 这个结果与第 52 节中公式化了的结果是类似的．

二次以后的近似也是同样地进行：每一步，方程和因子展开的阶数增加一阶；因此，在第三次近似中，我们将处理高达 J_2^3 的展开式．

二次近似解的所有短周期项和长周期项都准到 J_2^2．

67. 两种方法的比较

上述两种方法虽然表为不同的形式，但用于解同一方程所得到的结果则是相同的．

第一种方法是由柴倍耳和勃劳威尔作出的德洛勒方法的改进，按照所定义的新量 r' 和 v'，以有限的形式给出结果（参看第 61 节）．在问题比较复杂的情况下，这种变换未必能够实现，而必须像拉格朗日方法一样，按照偏心率的幂次进行同样的展开，在这种情况下，得出的结果是相同的．

因此，第一种方法不问偏心率的大小，其结果是有效的．这个优点在比较复杂的问题中失去了．两种方法的主要差别在于：拉格朗日方程的方法实质上是逐次逼近法，每一次逼近都重复同样的计算，展开式越来越长．另一方面，我们可以用柴倍耳方法达到任何要求的精度，仅仅要求使恒等式满足到 J_2 的高阶．

拉格朗日方法提供一个对小偏心率有效、计算量较小得到一阶理论的方法．另一方面，当要求的精度较高，特别是考虑长周期项时，柴倍耳方法可能是有利的，这同样适用于天体力学的其他问题．拉格朗日方法给出一个对问题快速而粗略的估计，并显示出运动的主要特征．但是，对于较高的精度，则必须应用比较经济的方法． 已经发展了许多种这样的方法，其中每一种方法都或多或少适应于给定的问题．第六章

和第七章将讨论其中的一些方法，但只是进行原则上的讨论，因为它们的具体应用是冗长的．对这些方法进行比较常常是困难的．在不同的学派之中，选择这种或那种方法的理由未必是明显的．

68. 小偏心率和小倾角的情况

如同我们在第 35 节看到的，当在运动中偏心率和倾角可能为零时，拉格朗日方程失效，因为方程右端的分母中出现 e 和 $\sin i$．

这个限制也适用于柴倍耳方法．如下所述，利用 (21) 式 S_1 的表达式(第 61 节)：

$$S_1 = \frac{\mu^2 J_2}{G'^3}\left[\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)(v'-l+e'\sin v') + \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\frac{1}{2}\sin(2g+2v') + \frac{e'}{2}\sin(2g+v') + \frac{e'}{6}\sin(2g+3v')\right]. \quad (34)$$

由 (17) 式所定义的变量 g' 中，有

$$g' = g + \frac{\partial S_1}{\partial G'} + \frac{\partial S_1}{\partial e'}\frac{\partial e'}{\partial G'} + \frac{\partial S_1}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial e'}\frac{\partial e'}{\partial G'}.$$

因为 S_1 也通过

$$e' = \sqrt{1 - G'^2/L'^2}$$

依赖于 G'，而 v' 由下列公式与 l 发生关系：

$$E' - e'\sin E' = l, \quad \operatorname{tg}\frac{v'}{2} = \sqrt{\frac{1+e'}{1-e'}}\operatorname{tg}\frac{E'}{2}.$$

由此可得

$$\partial e'/\partial G' = -G'/L'^2 e',$$

这就把 e' 带进分母，计算中没有被消去．

由此可得出结论：当偏心率很小时，这里描述的方法失效。

关于零倾角的情况与此相同，因为 $\operatorname{tg} i$ 出现在倾角长周期项的分母中．因此，在偏心率和倾角很小的情况下，必须采用第 33 节提出的变量．

但是，由于倾角的摄动小，把问题当作平面来处理，即不管 i 和 Ω 变量，可以得到一个好的解．不过，关于偏心率我们则必须应用变量 η、θ 和 λ（第 33 节），除非我们采用特别适合于零平均偏心率情况的完全不同的方法（例如希耳方法，参看第六章）．

69. 临界角

从第 66 节我们已知，采用拉格朗日方法在第二次近似中，可以找到分母包含 $J_2\omega_1'$ 即近地点的平运动的长周期项．

由 (31) 式可得

$$J_2\omega_1' = \frac{n_0 J_2}{a_0^2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{15}{4}\cos^2 i_0\right).$$

因此，这种长周期项的分母正比于 $1-5\cos^2 i_0$；当 $\cos^2 i_0$ 趋近于 $\frac{1}{5}$ 时，分母趋于零（这个临界倾角约为 $63°26'$）．于是，这些长周期项的振幅无限地增大，周期也将如此．上述的方法把 J_2 当作唯一的小量，但当 $(1-5\cos^2 i)$ 可与 J_2 比较时，方法则失其有效性．所以，我们必须应用不同的技术方法，我们将说明如何用柴倍耳方法处理这种情况．我们将在消去 l 之后（第 61 节和第 62 节）着手处理这个问题，任务是解正则方程组 (14)，其哈密顿函数是 $\phi' = \phi_0' + \phi_1' + \phi_{2S}' + \phi_{2P}'$，由 (18)，(19) 和 (22) 式给出．

计入 J_4 项，除 ϕ_{2S}' 之外，得到

$$\phi_{2S}^* = \phi'_{2S} + \frac{\mu^6 J_4}{L'^{10}}\left(\frac{15}{16}\frac{L'^7}{G'^7} - \frac{9}{16}\frac{L'^5}{G'^5}\right)$$

$$\times\left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4}\frac{H'^2}{G'^2} + \frac{35}{8}\frac{H'^4}{G'^4}\right),$$

$$\phi_{2P}^* = \phi'_{2P} + \frac{\mu^6 J_4}{L'^{10}}\left(\frac{L'^5}{G'^5} - \frac{L'^7}{G'^7}\right)$$

$$\times\left(+\frac{15}{64} - \frac{15}{8}\frac{H'^2}{G'^2} + \frac{105}{64}\frac{H'^4}{G'^4}\right)\cos 2g'.$$

现在我们尝试计算一个新的母函数：

$$S' = L''l' + G''g' + H''h' + \sum_n S'_n(L'', G'', H'', g'). \quad (35)$$

其中，L''，G''，H''，l''，g'' 和 h'' 是新变量，脚码 n 表示 S' 中不同阶的项，下面将对 n 值加以明确.

在第 63 节中的一般计算中，S'_n 的第一项 S'_1 由(25)式给出，注意分子包含 J_2，而分母包含 $1-5(H'^2/G'^2)=1-5\cos^2 i_0$。

所以，如果 $1-5(H'^2/G'^2)$ 是关于 J_2 的 λ 阶无穷小量，则我们不再能说 S'_1 是一阶，用 ν 表示 S'_1 的阶数（$\nu<1$ 和 $\lambda<1$）。

现在我们应用第 63 节的方法，考虑(35)式，并保留这种展开式的第一项 S'_ν.

用 $\phi''=\phi''_0+\phi''_1+\phi''_2+\cdots$ 表示与 l''，g'' 和 h'' 无关的新哈密顿函数，并使其等于 ϕ'，这个过程给出(高达二阶)：

$$\phi''_0+\phi''_1+\phi''_2 = \phi'_0 + \phi'_1\left(L'',\ G''+\frac{\partial S'}{\partial g'}, H''\right) + \phi_{2S}^* + \phi^*_{2P}, \quad (36)$$

其中

$$\phi'_1\left(L'',\ G''+\frac{\partial S'}{\partial g'}, H''\right)$$

$$= \phi_1'(L'', G'', H'') + \frac{\partial \phi_1'}{\partial G''}\frac{\partial S_\nu'}{\partial g'}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_1'}{\partial G''^2}\left(\frac{\partial S_\nu'}{\partial g'}\right)^2 + \cdots$$

和

$$\frac{\partial \phi_1'}{\partial G''} = \frac{\mu^4 J_2}{L''^3 G''^4}\left(\frac{3}{4} - \frac{15}{4}\frac{H''^2}{G''^2}\right).$$

零阶项总是 ϕ_0'' 和 ϕ_0'，一阶项是 ϕ_1'' 和 ϕ_1'，故得

$$\phi_0'' = \phi_0', \quad \phi_1'' = \phi_1'.$$

再高阶的项必定是二阶项，即是 ϕ_2''，ϕ_{2S}' 和 ϕ_{2P}'，但是我们也有

$$\frac{\partial \phi_1'}{\partial G''}\frac{\partial S_\nu'}{\partial g'}, \quad 1 + \lambda + \nu \text{ 阶},$$

和

$$\frac{\partial^2 \phi_1'}{\partial G''^2}\left(\frac{\partial^2 S_\nu'}{\partial g'^2}\right)^2, \ 1 + 2\nu \text{ 阶},$$

因为 $\dfrac{\partial^2 \phi'}{\partial G''^2}$ 不包含 $(1 - 5[H''^2/G''^2])$ 作为因子.

如果 $(1 + \lambda + \nu) \neq 2$，我们必须独立地把第一项和二阶项等同看待，故有 $\partial S_\nu' / \partial g' = 0$，$S'$ 与 g' 无关，$G' = G''$，即变量的改变保持恒等. 当然，这是和我们的假设矛盾的. 当 $(1 + 2\nu) \neq 2$ 时，这同样适用，因为再一次得到 $\partial S_\nu' / \partial g' = 0$. 因此，我们同时取

$$1 + \lambda + \nu = 2,$$

$$1 + 2\nu = 2.$$

因此 $\nu = \lambda = \dfrac{1}{2}$.

所以，应用这样的方法把 S' 展成第一项为 J_2 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶的级数，我们可以进行接近于临界角的计算. 事实上，甚至当

$(1-5[H''^2/G''^2])$ 更小时，下述的计算仍然有效。

这样，当我们把 ϕ_{2p}^* 表为

$$\phi_{2p}^* = Q\cos 2g' = 2Q\cos^2 g' - Q,$$

(36) 式的二阶项相等给出

$$\phi_2'' = \phi_{2s}^* + 2Q\cos^2 g' - Q, + \frac{\partial}{\partial G''}(\phi_1' + \phi_{2s}^* + 2Q\cos^2 g' - Q) \times \frac{\partial S_{1/2}'}{\partial g'} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_1'}{\partial G''^2}\left(\frac{\partial S_{1/2}'}{\partial g'}\right)^2.$$

其中，$S_{1/2}'$ 依赖于 g'. 作为二阶项，$\partial\phi_{2s}^*/\partial G''$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial G''}$ 较小，在下一次的近似中应当被略去. 但是，为了保留长期项(当 $i \to i_0$ 时，长期项不趋于零)，我们将只略去 $\partial(2Q\cos^2 g)/\partial G''$，并保留等式：

$$\phi_2'' = \phi_{2s}^* - Q + 2Q\cos^2 g' + \frac{\partial}{\partial G''}(\phi_1' + \phi_{2s}^* - Q)\frac{\partial S_{1/2}'}{\partial g'} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_1'}{\partial G''^2}\left(\frac{\partial S_{1/2}'}{\partial g'}\right)^2. \tag{37}$$

分离出与 g' 无关的项，得到下列两个等式：

$$\phi_2'' = \phi_{2s}^* - Q,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_1'}{\partial G''^2}\left(\frac{\partial S_{1/2}'}{\partial g'}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial G''}(\phi_1' + \phi_{2s}^* - Q) \times \frac{\partial S_{1/2}'}{\partial g'} + 2Q\cos^2 g' = 0. \tag{38}$$

第一式给出 ϕ_2''，而第二式确定了 $\partial S_{1/2}'/\partial g'$，也就确定了 $S_{1/2}'$.

令

$$A = \frac{-\partial(\phi_1' + \phi_{2s}^* - Q)/\partial G''}{\partial^2\phi_1'/\partial G''^2},$$

$$B=\frac{4Q}{\partial^2\phi_1'/\partial G''^2},\quad g^*=g'-\frac{\pi}{2},$$

我们得到

$$\frac{\partial S_{1/2}'}{\partial g^*}=A\pm\sqrt{A^2-B\sin^2 g^*}. \tag{39}$$

70. 临界角附近近地点的天平动

(39) 式的积分不能用初等函数表示，必须引入椭圆函数.

如果用 $\frac{1}{5}$ 代替 B 中的 H''^2/G''^2，我们看出在临界倾角附近有

$$B=\frac{J_2\mu^2}{5L'^2}\left(1-\frac{L'^2}{G''^2}\right)\left(1-\frac{J_4}{J_2^2}\right).$$

因此，B 的符号取决于 $(J_4-J_2^2)$ 的符号. 由于 $G''^2=L'^2(1-e'^2)<L'^2$，故有

$$B<0,\ 如果\ J_4<J_2^2;$$
$$B=0,\ 如果\ J_4=J_2^2;$$
$$B>0,\ 如果\ J_4>J_2^2.$$

对于地球有下列近似值:

$$J_2=0.00108,\ J_4=0.000002,$$

$$\frac{J_4}{J_2^2}\doteq 1.7,\qquad 因此\ B>0.$$

现在我们来研究这种情况，并令 $k^2=B/A^2$. (39) 式的积分给出

$$S_{1/2}'=Ag^*-A\int_0^{g^*}\sqrt{1-k^2\sin^2 g^*}\,dg^*.$$

让我们更细致地研究近地点的运动. 为了考虑上面作出的变量变换 $g^*=g'-\pi/2$，可把形式为 (23) 的方程组 (借

助于母函数(35)给出变量变换)写为

$$G'' = G' - \frac{\partial S'_{1/2}}{\partial g^*}, \quad g_1'' = g^* + \frac{\partial S'_{1/2}}{\partial G''}, \qquad (40)$$

其中，　　$g_1'' = g'' - \pi/2$，

形式为

$$G'' = 常数, \quad g_1'' = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial G''}\right)(t - t_0) \qquad (41)$$

的方程(40)关于 g_1'' 的解可写为

$$g_1'' = \left(1 + \frac{\partial A}{\partial G''}\right)g^* - \left(\frac{\partial A}{\partial G''} - \frac{A}{2B}\frac{\partial B}{\partial G''}\right) \times \int_0^{g^*} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{A}{2B}\frac{\partial B}{\partial G''}\int_0^{g^*}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \qquad (42)$$

上式是关于 g^* 引数 g_1'' 的隐函数,而 g_1'' 本身是时间的线性函数.

由临界倾角 i_0 的定义,当 $i \to i_0(A \to 0)$ 时,$k = \frac{\sqrt{B}}{A}$ 趋于无穷大,在 $i = i_0$ 附近，$k > 1$. 我们必须改变(42)式中由 $\operatorname{tg}\varphi = \cos\theta/\sqrt{k^2 - 1}$ 所定义的变量,以求得典型的椭圆函数.

计算需要巧妙地用椭圆函数处理. 这里，我们不再转载计算过程,而仅仅指出：只要 A 是小量 $(k^2 > 1)$，由(42)式定义的函数的倒数就是周期性的,其周期为

$$P = 4\int_0^{\arcsin\frac{1}{k}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}},$$

振幅为 $\arcsin\frac{1}{k}$.

当 $1/k = 0$，$A = 0$ 时，解简化成 $g^* = 0$，$g'' = \pi/2$，

近地点固定在纬度最高的一个点上.

当 $1/k \neq 0$，而 $k > 1$ 时，上面的考虑表明，近地点围绕 $g^* = 0$ 点进行周期性的运动，其振幅为 $1/k$，周期为 P. 我们注意到，这种运动的周期本来就取决于初始条件，而实际上对初始条件特别敏感．事实上，当相当接近于地球的卫星的倾角只从 i_0 变化到 $i_0 \pm 8'$ 时，$1/k$ 则从 0 变化到 1.

这种振荡的周期缺乏到目前为止讨论过的运转周期的稳定性(运转周期随着初始条件缓慢而连续地变化)．这种新型的周期称为天平动的周期，我们将于第 71 节中进行讨论.

当 k 趋于 1 时，天平动的周期无限地增加，振幅趋于 90°．在这个极限上，我们得到近地点趋向于一个交点的渐近运动，这种运动持续无限长的时间.

当 $k < 1$ 时，近地点绕着地球旋转，天平动周期就是近地点绕着地球旋转的周期，这是本章处理的一般情况．虽然 (42) 式仍然有效并描述了近地点的运动，但是第 64 节和第 65 节的解代表了其等价的也是有效的解．不过，对这两种表达式进行评价是困难的，那一种表达式收敛性更好取决于运动是渐近的 ($k \doteq 1$) 或不是渐近的(k 是小量).

71. 天平动的现象

在天体力学中，天平动是一种普通的现象，可以在太阳系许多天体的运动中观测到．著名的例子可以脱罗央群小行星为代表．脱罗央群小行星在轨道上处于木星前后 60°．某些卫星如土卫七，也呈现出这种类型的运动．最后，月球绕轴自转也是这种类型的运动(月球天平动)，虽然此种运动与轨道运动没有关联.

每当解包含有长周期项，其周期在一定的初始条件下趋向于无穷大，就出现天平动现象．天平动的周期可以是近地

点的引数的周期，如上述的例子，但更常见的是共振的周期。摄动函数的二个引数的周期通约时就产生共振．任何长周期项在邻近的运动中可以引起共振，只要对应于完全共振的平衡点的位置是稳定的． 天平动根本的性质在于天平动周期(在天平动的区域，天平动周期代替了运转的周期)，对于初始条件的小量变动是很敏感的．而且，一般引起天平动的初始条件的范围很狭小，其边界与渐近运动的区域接界．

在天平动区域的周围，运动的类型非常不一致，相邻轨道的某些性质可以是不连续的(例如，近日点的轨迹)．但是，这些运动可以用单摆的运动来比拟．在方程中，也显示出这种相似性．根据初始条件(冲击)，单摆的运动可以是摆动的(周期性的往复)、渐近的(趋向于不稳定的上面的平衡位置)或旋转型的(摆绕着轴转)．

初始条件很小的变化可以完全改变运动的状态，这同样适用于天体力学．研究这些运动的特点是这门科学最困难的方面之一．

第六章　月球理论和卫星的运动

月球是最近的自然天体，其位置的观测精度最高，因此，很自然地解决月球运动的问题的精细程度，为我们对任何天体所不能希望的．最近两个世纪以来，许多数学家从各种途径进行了尝试，他们的工作已经对天体力学和这门科学主要的问题之一——月球的运动问题(月球理论)作出了第一流的贡献；其中，最杰出的是拉普拉斯、邦加雷、汉申、德洛勒、希耳和布朗．

72. 月球理论的主要问题

月球绕地球运转主要受太阳摄动，其他天体也引起一些摄动；但是正如我们在第 8 节已经看到的，它们的作用要弱得多．地球的扁形(参看第 55 节)也有影响，但由于月地相距甚远，其作用是很小的(第 56 节)．事实上，月球所受到的实际摄动很好地近似于假设太阳是唯一的摄动体，而地球绕太阳在一个不变的克普勒椭圆上运转． 在这些简化条件下，月球运动的研究通称为月球理论的主要问题．

由行星引起的摄动称为直接的行星摄动，而由于地球受到行星的摄动使地球的轨道不是准确的椭圆，从这一事实所引起的月球运动的差异，称为间接的行星摄动．间接的行星摄动比直接的行星摄动强，但比太阳的摄动则弱得多．

为了用公式表示月球的运动，我们计算密切根数的变化，或者计算球坐标的变化．这些变化被表为所谓月行差的周期项之和．其中一些月行差很早就知道了：依巴谷已经知道出

差；克普勒已知二均差；更不必说交点的逆行运动和近地点的前移，这两种运动的周期和朔望月一起决定了交食的循环。我们将首先简短地讨论主要的月行差，然后，介绍这些最著名的月球理论的基础。

73. 月球理论主要问题的近似解

月球运动主要问题的摄动函数已在第 45 节和第 46 节建立，并已表为密切变量 a, i, Ω, ω，向径 r，真近点角 v 和太阳相对于地球的向径 r' 与真近点角 v' 的函数 [第 46 节方程 (41)]。

在主要的月行差的近似研究中，引人下列简化条件：

(a) 鉴于月球的倾角 i 是小量 (5°8′)，我们可以在摄动函数中略去 i^4。

(b) 略去地球轨道的偏心率 e'($e' = 0.016$)。

(c) 略去高于 e^2 的项。这里，e 是月球轨道的偏心率 ($e = 0.054$)。

但是，必须注意，在月球运动的精确研究中，不采用这些简化条件。

由条件 (a)，在第 4 章摄动函数 (41) 式中，我们可用 i 代替 $\sin i$，用 $(1 - i^2)$ 代替 $\cos^2\frac{i}{2}$，而且由条件 (b)，我们可用 1 代替 a'/r'，用太阳的平近点角 M' 代替 v'。因此，我们有

$$R_1 = n'^2 a^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{8} i^2 + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \times \cos 2(\omega - \omega' + v - M' + \Omega) + \frac{3i^2}{8} \times [\cos(2\omega + 2v) + \cos(2\omega' + 2M' - 2\Omega)]\right\}. \quad (1)$$

应用条件 (c)，并进行类似于第 40 节中二体问题的函数展开的计算，得

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2v = \frac{5}{2}e^2 - 3e\cos M + \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right)\cos 2M$$
$$+ e\cos 3M + e^2\cos 4M, \tag{2}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2v = -3e\sin M + \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right)\sin 2M$$
$$+ e\sin 3M + e^2\sin 4M, \tag{3}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3e^2}{2} - 2e\cos M - \frac{e^2}{2}\cos 2M. \tag{4}$$

当对 e 的展开进一步进行下去时，头两个展开式的系数不再保持恒等。对于不含 i^2 作为因子的项进行以上的代换。由于 i^2 是小量，忽略 i^2e 项，更不必说 i^2e^2 项。

这样，每当 i^2 为因子时，可以用 1 代替 $\left(\frac{r}{a}\right)^2$，用$M$代替 v。把

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2(\omega - \omega' + v - M' + \Omega)$$

用

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2v\cos 2(\omega - \omega' - M' + \Omega)$$
$$- \left(\frac{r}{a}\right)^2\sin 2v\sin 2(\omega - \omega' - M' + \Omega)$$

代替，并利用 (2) 式和 (3) 式，得

$$\frac{5}{2}e^2\cos 2(\omega - \omega' - M' + \Omega)$$
$$- 3e\cos(2\omega - 2\omega' - 2M' + 2\Omega + M)$$
$$+ \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right)\cos 2(\omega - \omega' - M' + \Omega + M)$$
$$+ e\cos(2\omega - 2\omega' - 2M' + 2\Omega + 3M)$$

$$+ e^2\cos(2\omega - 2\omega' - 2M' + 2\Omega + 4M).$$

这样，我们得到下列 R_1 的展开式：

$$\begin{aligned}
R_1 = n'^2a^2\Big[&\frac{1}{4} + \frac{3e^2}{8} - \frac{e}{2}\cos M - \frac{e^2}{8}\cos 2M \\
&+ \frac{15}{8}e^2\cos(2\omega - 2\omega' - 2M' + 2\Omega) \\
&- \frac{9}{4}e\cos(2\omega - 2\omega' - 2M' + 2\Omega + M) \\
&+ \left(\frac{3}{4} - \frac{15}{8}e^2\right)\cos(2\omega - 2\omega' - 2M' + 2\Omega + 2M) \\
&+ \frac{3}{4}e\cos(2\omega - 2\omega' - 2M' + 2\Omega + 3M) \\
&+ \frac{3e^2}{4}\cos(2\omega - 2\omega' - 2M' + 2\Omega + 4M)\Big] \\
&+ n'^2a^2i^2\Big[-\frac{3}{8} - \frac{3}{16}\cos(2\omega - 2\omega' - 2M' + 2\Omega + 2M) \\
&+ \frac{3}{8}\cos(2\omega + 2M) + \frac{3}{8}\cos(2\omega' + 2M' - 2\Omega)\Big].
\end{aligned} \tag{5}$$

应用拉格朗日方程于上列摄动函数，则得根数的变化。

因此，应用拉格朗日公式[第三章（45）式]，我们可由 R_1 的非周期部分

$$R_S = n'^2a^2\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{8}i^2\right),$$

计算近地点和升交点的长期运动的第一次近似值：

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R_S}{\partial i} \\
&= \frac{n'^2a^2}{na^2 i}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)\left(-\frac{6}{8}i\right) \\
&= -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\frac{d\varpi}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R_S}{\partial e}-\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R_S}{\partial i}$$

$$=\frac{n'^2a^2}{na^2e}\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\frac{6e}{8}+\frac{n'^2a^2}{na^2i}\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\frac{6i}{8}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n}.$$

由此得

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=\frac{d\bar{\Omega}}{dt}+\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\left(1-\frac{e^2}{2}\right).$$

下式是比较精确的表达式(略去 e)

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=n\left[\frac{3}{4}\left(\frac{n'}{n}\right)^2+\frac{225}{32}\left(\frac{n'}{n}\right)^3+\frac{4071}{128}\left(\frac{n'}{n}\right)^4+\cdots\right]$$

数值应用。

太阳的平运动 $n'=360°$/年(每年为 365.25 天),而月球的平运动 $n=4812.°7$/年。

于是,我们求得 $\frac{d\bar{\Omega}}{dt}=-20.°16$/年和 $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}=39.°09$/年,周期分别为 17.86 年和 9.21 年。真实运动的完整理论得出相应值为 18.60 年和 8.85 年。

74. 月球运动的主要月行差

可以用类似的方法得到摄动函数的其他项的结果,但是,我们不用密切根数而研究月球的经度和纬度的变化。例如,从第43节 (35) 式求得真经度为

$$\phi=v+\omega+\Omega$$

$$=\omega+\Omega+M+\left(2e-\frac{e^3}{4}+\cdots\right)\sin M$$

$$+\left(\frac{5}{4}e^2+\cdots\right)\sin 2M+\cdots. \tag{6}$$

同样地，纬度φ由

$$\sin\varphi = \sin i \sin(\omega + v) \tag{7}$$

给出，其中，v 也将表为 e 和M的函数。

把摄动函数 R（方程 5）代入拉格朗日方程进行积分，并把结果代入(6)或(7)。但是，必须注意，和第 51 节一样，计算M必须预先积分 a 的方程，其结果是三角表达式，终结式给出月球的真轨道.

月球运动的中心差实质上是经度 $v - M$、向径 $r - a$ 和纬度相应的项的展开式. 这些展开式和第四章中的展开式类似，还应当加上相同引数的摄动. 中心差描述了月球的基本轨道，这是一个略微变形的椭圆，其偏心率为 0.0549. 这个基本轨道进行二重旋转：其一是在轨道面内绕着轨道的焦点旋转(近地点的运动)；其二是绕着椭圆平面上的轴旋转（交点的运动).

月行差是用变化的周期旋转的基本轨道不固定的变形，它们是由摄动函数不同的项引起的. 主要的月行差如下：

(1) 起源于 R_1 的项

$$\frac{3}{8} n'^2 a^2 i^2 \cos(2\omega' + 2M' - 2\Omega). \tag{8}$$

在纬度上的主要摄动，由于引数中不存在 M，故给出 $2n'$ 的除数，其结果相当于增加 12 倍的贡献. 在纬度上，还给出正比于 $\sin(\omega + M + 2\Omega - 2\omega' - 2M')$ 的变化，其周期为 32.28 天，振幅为 10′24″(即约为 550 公里)。

(2) 出差，主要起源于 R 中下面的项：

$$\frac{5}{8} n'^2 a^2 e^2 \cos[2(\omega + \Omega) - 2(M' + \omega')]$$

$$- \frac{9}{4} n'^2 a^2 e \cos[M + 2(\omega + \Omega) - 2(M' + \omega')]. \tag{9}$$

计算给出在经度上出差的下面结果

$$1^{\circ}.274 \sin[M + 2(\omega + \Omega) - 2(M' + \omega')],$$

其周期为31.812天. 这是在月球理论中最重要的月行差. 依巴谷已经知道了出差. 出差引起月球位置的偏移接近于月球直径的2.5倍.

(3) 二均差,具有

$$2(M + \omega + \Omega - M' - \omega')$$

的引数和大约14.78天的周期(准确等于半个太阴月). 对于经度相应的系数,包含有

$$\frac{75}{16} e^2 \frac{n'}{n} + \left(\frac{11}{8} + \frac{1101}{64} e^2\right)\left(\frac{n'}{n}\right)^2 + \frac{59}{12}\left(\frac{n'}{n}\right)^3 + \frac{893}{72}\left(\frac{n'}{n}\right)^4 + \cdots, \qquad (10)$$

这给出 39′30″ 的振幅. 二均差是第谷发现的,它是仅次于出差的第二个重要的月行差.

(4) 月角差,其周期是二均差周期的二倍,在经度项中引数 $(M + \omega + \Omega - M' - \omega')$ 的系数为

$$\frac{a}{a'}\left(-\frac{15}{8}\frac{n'}{n} - \frac{93}{8}\left(\frac{n'}{n}\right)^2 + \cdots\right),$$

其振幅约为125″.

这是具有 a/a' 作为因子的最大的月行差, 把这个振幅跟观测值比较,可以测量地球和太阳的距离(或视差),因此称为"月角差"(视差月行差).

(5) 周年差,其周期为一年(引数 M'), 振幅为668″,经度项的系数为

$$-3e'\frac{n'}{n} + \frac{735}{16} e'\left(\frac{n'}{n}\right)^3 + \frac{1261}{4} e'\left(\frac{n'}{n}\right)^4 + \cdots. \qquad (11)$$

当然,周年差依赖于地球轨道的偏心率 e'.

还有大量的没有命名的其他月行差. 事实上, 我们找到

13 个振幅超过 100″ 和 46 个振幅在 1″ 和 100″ 之间的经度月行差.

在普遍地用于历书计算的布朗理论中，我们知道有 310 个不同周期的月行差.

75. 各种月球运动理论

计算所有振幅在某一个限值内的月行差，并使其表示被观测到的轨道，称为月球运动理论。大量的方法已用于这种计算. 上面已经提到，在这种理论中所作的假设涉及到主要问题的解. 其结果是月球地心坐标(经度、纬度和向径)的时间函数数值表达式.

各种方法的差别主要在于克服这些困难的程度、采用的坐标系统和选择的比较轨道(称为中间轨道)的不同.

现在我们将简要地介绍由德洛勒、布朗和汉申提出的三种不同的理论. 一百年来，这些理论已作为计算月球运动的基础,其中的每一种都是多年工作的结晶. 当然,在这里我们不可能详细叙述它们的来龙去脉，而只能是简单地介绍每种理论的主要特征.

76. 德洛勒的理论

德洛勒于 1860 年和 1867 年发表了他的理论，代表了月球运动理论最广泛的分析研究. 他的目标是把月球的坐标表示为傅里叶级数的形式，级数的系数是下列各量（设均为小量)的有限展开式:

e 和 e'，月球和太阳的轨道偏心率;

$\gamma=\sin\frac{i}{2}$，其中 i 是倾角;

n'/n，太阳和月球平均运动之比;

a/a'，半长径之比。

和至今所遇到的所有问题一样，我们将从二体问题的轨道着手研究。我们展开摄动函数，并把方程写成德洛勒变量 L, G, H, l, g 和 h 以及太阳的平近点角 $l' = n'(t - t_0)$ 的函数(参看第 32 节)，这些方程是正则的，但是哈密顿函数依赖于时间。引入两个新的变量：$k = l'$ 和一个共轭的变量 K (参看第 20 节)，可使得哈密顿函数不依赖于时间。这样，我们有了四对共轭变量的正则方程组，新的哈密顿函数由原先的哈密顿函数加上 K 得到。

德洛勒从哈密顿函数中分出一个重要的周期项

$$\phi = A + B\cos\theta + \phi_1.$$

其中，A 是不依赖于变量 g, h, k, l 的项，而 θ 是这些变量的线性函数，其系数为整数，$\theta = a_1 g + a_2 h + a_3 k + a_4 l$；$\phi_1$ 包括摄动函数的其余部分。

作正则变换，我们可使 θ 成为正则变量之一(我们将记为 l)，并得到下面的表达式：

$$\phi = A(L, G, H, K) + B(L, G, H, K)\cos l + \phi_1.$$

解下列具有哈密顿函数 $\phi^* = A + B\cos l$ 的正则方程组：

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial\phi^*}{\partial l}, \qquad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial\phi^*}{\partial g},$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial\phi^*}{\partial h}, \qquad \frac{dK}{dt} = \frac{\partial\phi^*}{\partial k},$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial\phi^*}{\partial L}, \qquad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial\phi^*}{\partial G},$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\phi^*}{\partial H}, \qquad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial\phi^*}{\partial K}. \tag{12}$$

因为 ϕ^* 不依赖于 g，h 和 k，第二、三和四三个方程的右端为零，进而在解中 G，H 和 K 是常数。因此，我们只需解

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial\phi^*}{\partial l},\qquad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial\phi^*}{\partial L}.$$

可以用各种方法解出这组方程。德洛勒应用的方法太长了，这里不能赘述。它相当于从下面的母函数出发，再进行一次新的正则变换：

$$S=L'l+G'g+H'g+K'k+S_1+S_2+\cdots,$$

与第 63 节中应用的变换完全类似，事实上问题是同一个。我们只考虑一阶解(即只有 S_1)。新的变量 L', G', H', K', l', g', h', k' 是这样定义的，它使新的哈密顿函数 ϕ^* 不再包含 l'。

然后，这样定义的变量变换被应用到具有哈密顿函数

$$\phi=\phi^*+\phi_1$$

的原方程组，变量的变换使得 $B\cos l$ 项从 ϕ 中消失，或至少降低表征摄动力的小量的阶数一阶。

现在，我们对 ϕ_1 的新项进行同样的计算，依次消去它，并继续这个过程直到我们已经消去所有可能显著影响解的项。

经过 N 次这样的变换之后，我们得到第 N 组未知量：

$$L_N,\ G_N,\ H_N,\ K_N,\ l_N,\ g_N,\ h_N\ 和\ k_N,$$

和哈密顿函数

$$\phi_N=A_N(L_N,\ G_N,\ H_N,\ K_N).$$

现在，方程化为下列形式：

$$\frac{dL_N}{dt}=\frac{\partial\phi_N}{\partial l_N}=0,\qquad \frac{dG_N}{dt}=\frac{\partial\phi_N}{\partial g_N}=0,$$

$$\frac{dH_N}{dt}=\frac{\partial\phi_N}{\partial h_N}=0,\qquad \frac{dK_N}{dt}=\frac{\partial\phi_N}{\partial k_N}=0,$$

$$\frac{dl_N}{dt}=-\frac{\partial\phi_N}{\partial L_N},\qquad \frac{dg_N}{dt}=-\frac{\partial\phi_N}{\partial G_N},$$

$$\frac{dh_N}{dt}=-\frac{\partial\phi_N}{\partial H_N},\qquad \frac{dk_N}{dt}=-\frac{\partial\phi_N}{\partial K_N}.$$

其结果是 L_N, G_N, H_N 和 K_N 为常数，而 l_N, g_N, h_N 和 k_N 为时间的线性函数：

$$l_N = l'_N t - l_0,\quad g_N = g'_N t - g_0,$$
$$h_N = h'_N t - h_0,\quad k_N = k'_N t - k_0.$$

因为我们已经定义了逐次的变量变换，所以我们知道相继的两组变量之间的关系，并可以逐步地确定初始变量(密切根数)和最后的变量之间的关系式：

$$\begin{aligned} L &= F_L(L_N, G_N, H_N, K_N, l_N, g_N, h_N, k_N)\ \text{等}, \\ l &= F_l(L_N, G_N, H_N, K_N, l_N, g_N, h_N, k_N)\ \text{等}. \end{aligned} \tag{13}$$

其中，L_N, G_N, H_N 和 K_N 是常数，而变量 l_N, g_N, h_N 和 k_N 是时间的线性函数。于是，我们已经找到月球运动问题的解。余下的全部问题就是必须确定作为 L_N, G_N, H_N 和 K_N 的函数的任意常数 e, γ, a 和 n，使这些常数在一个无限的时间间隔内具有平根数或根数的平均值的特征。然后，按照要求的形式表示解，并使我们能够求得密切根数的任何函数，特别是求得天体的坐标。

因此，在德洛勒方法中，我们采取连续消去周期项的方法来计算等价于一种坐标系统的椭圆根数的摄动。长期项只是在此过程的末了才出现。

这个方法实质上和第 5 章介绍的关于人造卫星的柴倍耳方法相同。事实上，柴倍耳方法基本上是德洛勒方法的改进和简化。

德洛勒用这种方法处理了 230 个以上的摄动函数项，给出月球的坐标近 400 项，代表作为小参数的函数的这些项的有限展开式中总共一万个以上的单项。

现在，用数值代替这些参数足够了。这些数值的改进只不过相当于 (13) 式中的一个代换。但是，德洛勒所忽略的项不是很小的，为了达到现代的观测精度，至少要用 5 倍的项进

行同样的计算.

77. 希耳和布朗的理论

这个理论是以本世纪初希耳进行的理论工作为基础的，并成为现代月球星历表的基石.

德洛勒理论的主要困难之一，是由于以 n'/n 展开的级数收敛很慢，因此要计算很多项. 这个比值 n'/n 的数值已由观测很精确地测定了. 希耳的建议(布朗进一步发展和应用)是不从椭圆轨道开始，而应当从已经包含了全部只依赖于 n'/n 的摄动的中间轨道着手工作. 另一个重要的特征是用直角坐标代替根数，这就不需要根据椭圆根数进行摄动函数的展开.

中间轨道(称为二均轨道)用下列的方法得到：我们考虑一个平面的问题，月球在黄道平面内运动意味着求解时只考虑与 i 无关的项. 我们进一步假设地球在一个圆上绕着太阳运转，这表明求解时只计算与 e' 无关的项. 最后，从第 4 章(39)式定义的摄动函数中，我们只保留 R_1：

$$R_1 = \frac{kmr^2}{r'^3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 S\right), \quad km = n'^2 a'^3.$$

计算时略去 a/a'，这意味着太阳是在无穷远处，其吸引力等于在距离 a' 处所作用的力(参看第 73 节). 在平面直角坐标中，运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{-\mu x}{r^3} + \frac{\partial R_1}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{-\mu y}{r^3} + \frac{\partial R_1}{\partial y}, \qquad \mu = n^2 a^3. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

希耳选择一个以角速度 n' 旋转的坐标系，Tx 轴始终是通过地心并指向太阳. 太阳的圆周运动准确地是平均运动 n' (参看图 10). 我们有

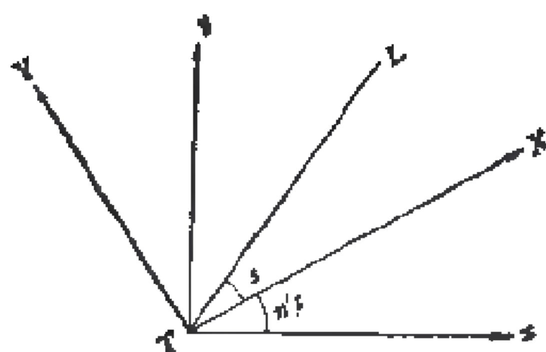


图 10

$$X = r\cos S,\ \ Y = r\sin S,$$
$$X = x\cos n't + y\sin n't,$$
$$Y = -x\sin n't + y\cos n't.$$

通过这种变量的变化得到下面方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2X}{dt^2} - 2n'\frac{dY}{dt} + \frac{\mu X}{r^3} - 3n'^2X = 0,\\&\frac{d^2Y}{dt^2} + 2n'\frac{dX}{dt} + \frac{\mu Y}{r^3} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

上面方程组的通解给出全部(14)式的解的轨道，即根据上面作出的假设，在月球理论中只依赖于 n'/n 和 e 的项。

应用这些方程，我们尝试找出只包含与 n'/n 有关的项的解，即对应于 $e=0$ 的项。这个二均轨道是方程组(15)的周期解，对于 OX 轴和 OY 轴是对称的。解的形式如下：

$$\left.\begin{aligned}X_0 &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\cos(2i+1)(n-n')(t-t_0),\\Y_0 &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i'\sin(2i+1)(n-n')(t-t_0).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中，每一个系数 a_i 和 a_i' 都是关于 $n'/(n-n')$ 的幂级数。现在我们用数值代替 n'/n，因而级数(16)也为数值所代替，于是大大简化了计算。这种方法的第二步在于找出(15)式

的一个比较普遍的解以便得到依赖于 e 的项。所要求的解表为下列形式：

$$X = X_0 + \delta x,$$
$$Y = Y_0 + \delta y.$$

代入 (14)式，记住 X_0 和 Y_0 是方程的解，并令

$$\Omega = \frac{\mu}{r} + \frac{3}{2} n_2'^2 X^2,$$

得到关于 δx 和 δy 的微分方程(略去 δx 和 δy 的平方)：

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} - 2n' \frac{d\delta y}{dt} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}\delta y,$$

$$\frac{d^2\delta y}{dt^2} + 2n' \frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}\delta x + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\delta y.$$

Ω 的导数由此二均轨道求得。这个方程组的解包含第二个周期，它和近地点的周期没有什么不同。

应用类似的改正方法，我们建立 z 的方程(不再略去 i)，并把第三个周期引入解中：交点的周期。

用类似的方法进行其余部分的计算：建立所计算的项的微分方程，并记住原先算出的项是类似的微分方程的解。

当摄动函数的其他部分被尽可能加到 (15) 式以后得到的各种方程，在形式上和处理上同 (15) 式类似。

和 n'/n 不同，其他参数在计算时保留代数形式，只是在最后才用它们的数值代替。

这样，我们已经看到，在布朗方法中，我们首先计算变差的主要部分。其次，计算依赖于 e 的项，这些项特别地代表近地点的运动和出差。然后，我们计算交点的运动。再后，一步一步改进计算结果，把比较次要的月行差项也包括进去。

和德洛勒方法的情况不同，椭圆根数只是起着次要的作用，因为坐标是直角的坐标，而初始中间轨道是二均轨道。

78. 汉申的理论

汉申的理论发表于 1857 年，甚至比德洛勒的理论发表更早。汉申给出和德洛勒方法同样精度的解。但是，因为提出得更早，所以更常被应用。虽然，汉申的理论原先是对月球运动的问题给出计算公式，但是，后来它比较成功地用于行星型的问题。因此，我们将在第 7 章（第 85 节至第 87 节）简要地讨论这个理论。

79. 理论的改进

同近代的观测精度比较表明，需要改进上述获得坐标或密切根数的数值级数解的月球运动理论。纯代数理论（如德洛勒理论）的杰出优点是，只要简单地代入更好的数值，精度就能得到改进。而其他的理论，特别是布朗的理论则不能这样做。因此，根据过去 50 年来的观测结果进行理论的改进看来是必要的。

用于改进月球运动理论的方法之一如下：考察下列简化形式的微分方程组：

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_j), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 6.$$

它依赖于六个未知量 x_j。

设有一个待改进的由纯数值表达式构成的近似解 $\bar{x}_j$，t 是其中唯一的文字量。把这个解代入上面方程的右端，并设 $f_i(\bar{x}_j)$ 是这种代换的结果。

对方程

$$\frac{dx_i^*}{dt} = f_i(\bar{x}_j)$$

进行积分，得

$$x_i^* = x_{i0} + \int f_i(\bar{x}_j)dt.$$

我们宁可与观测比较以决定 x_{i0} 值，而这样便得到六个新的 x_i^* 级数。这个过程可以重复几次，把 x_i^* 当成一个新的近似数值解，并与上面的 $\bar{x}_j$ 一样地处理等等。

虽然没有发展普遍的级数解的理论，但是已经指出，甚至在参数 n'/n，e，e' 和 i 不是小量的困难情况下，这种级数也收敛于方程组的解。因此，我们有了改进理论的一种方法。恩克特别将这种方法用于布朗的理论。

80. 其他自然卫星的运动问题

月球的运动不是太阳系中唯一的一个问题，其他自然卫星如木卫 6 和木卫 7 也有很类似的情况。但是，在自然卫星的情况下，作用力之间的比率是不同的，否则同一天体的二颗卫星将彼此互相作用。

某些卫星特别是木卫 8 的运动代表了月球理论的一种极端情况。在这种三体问题中，参数 n'/n、e 和 i 不再像月球那样约为 0.1 或 0.05，而是分别等于 0.17，0.4 和 0.5。展开式的收敛性比月球的情况差得多。密切根数偏心率有时甚至超过 0.67，即越出二体问题中级数的收敛界限。（参看第 44 节）

但是，采用与上述很不同的方法可以得到近似值，这些方法更多地建立在纯数值计算的基础上，动力学的考虑则少得多。此外，采用类似于上节介绍的逐步逼近方法改进近似值。

另一种情况是，同一个天体的两颗卫星的平均运动表现为通约。海卫 1 和土卫 7 就是这种情况，其平均运动之比为 3:4。设 l_1 和 l_2 是这两颗卫星的平近点角，则 $3l_1 - 4l_2$ 的周期几乎等于零。由于出现了小分母，将带有这个引数的项

进行积分其作用将增大．这个问题与人造卫星在临界角附近的运动完全类似．在这两颗卫星之间产生共振，质量较小的土卫七的运动具有天平动的特征．

木星最主要的三颗卫星也产生同样的共振和天平动，其平均运动之比为 1:2:4． 共振使得这些卫星不可能组成任何配置图形：如果其中两颗卫星在“合”的位置，则第三颗卫星就在“冲”的位置．

木星的第四颗卫星没有共振，但受到太阳和前三颗卫星的摄动．不过，天体问题是很复杂的，至今还没有方法能给出这种情况满意的解．

第七章　行星理论

行星运动的研究和卫星运动的研究很不相同．虽然由于行星的距离非常遥远，我们不能指望达到在月球运动研究中获得的绝对精度，但是困难在于至今所提出的所有行星运动理论都没有像月球运动理论那样令人满意． 行星 P_i 作用在另一个行星 P 上的摄动可表为摄动天体质量的展开式．如果摄动天体 P_i 在克普勒轨道上运动，则我们可以进行 P 所受的摄动的一阶项计算．但是，二阶项和高阶项的计算是很复杂的． 在这个领域已经进行的理论工作要比月球运动理论少，而且大部分的工作是属于数值计算的性质．拉普拉斯、汉申、勒威耶和纽康在行星理论的研究中都作出了杰出的贡献．

本章我们将遵循这种一般的趋势，给出行星运动理论的数值方法．而不是纯粹分析处理的方法．

81．摄动函数

正如我们在第 31 节所看到的，三体问题（太阳、受摄行星 P 和摄动行星 P'）的摄动函数由下式给出：

$$R = km'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x'x + y'y + z'z}{r'^3}\right). \qquad (1)$$

其中，m' 是摄动行星的质量，其日心坐标为 x'，y' 和 z' $(r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2})$；$x$，$y$ 和 z 是 P 的坐标；而 P 和 p' 之间的距离 Δ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \\ &= r'^2 + r^2 - 2rr'\cos S,\end{aligned}$$

S 是这两个行星的向径之间的夹角.

这种情况与月球理论之间第一个明显的不同在于摄动函数 R 的性质，R 可表为 S 的函数：

$$R = km'\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos S}} - \frac{rr'\cos S}{r'^3}\right). \quad (2)$$

从现在起，我们必须区分 $r > r'$ 和 $r' > r$ 的情况，但是这两种情况都用同样的方法处理. 我们将假设 $r' > r$，这是受到木星摄动的小行星的情况，或受土星摄动的木星的情况.

现在我们可以写出

$$R = \frac{km'}{r'}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'}\cos S}} - \left(\frac{r}{r'}\right)\cos S\right]. \quad (3)$$

这个表达式形式上与月球的相同(参看第 45 节).

但是，r/r' 的值是太大了，不能把它作为无限小来处理. r/r' 可以达到 0.8，而在木星和脱罗央群小行星的情况下甚至等于 1. 如果我们要进行第 45 节所介绍的级数展开，则必须保留很多项，而简化式

$$R_1 = \frac{km'}{r'}\frac{r^2}{r'^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 S\right),$$

甚至对摄动的定性形式也不能给出有效的表征.

注意：当 r/r' 不是小量时，km' 与主要的位函数项 kM/r 的系数 km(m = 太阳的质量)相比是小量，保证了 R 也是小量.

82. 一阶解

与月球理论的第二个不同部分地补偿了由于 r/r' 数值大引起的困难. 因此，和卫星的情况不同，行星的交点和近日点的长期运动是很缓慢的. 月球的交点旋转周期是 18 年，近

地点旋转周期是9年，而火星相应的周期分别为四万六千年和二万年．事实上，对于所有的大行星，这二个值总是超过一万八千年．

由于方程式和摄动函数与月球运动理论中所用的一样，因此解也具有同样的形式．所以，在行星的一阶理论中(等价于月球运动的主要问题)，假设摄动行星在一个固定的椭圆轨道上运动，解依赖于同样的四个对于 t 是线性的引数(即这两个行星的平均运动 l 和 l'，交点和近日点的平均运动 $\bar{\Omega}$ 和 $\bar{\omega}$)，其形式如下：

$$\Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\cos(\alpha l+\beta\bar{\omega}+\gamma\bar{\Omega}+\delta l'),\tag{4}$$

其中，α，β，γ 和 δ 是任意的四个整数．

但是，由于 $\bar{\omega}$ 和 $\bar{\Omega}$ 的周期很长，可以写为

$$\begin{aligned}\bar{\omega}&=\omega_0+\omega_0't,\\ \bar{\Omega}&=\Omega_0+\Omega_0't,\end{aligned}\tag{5}$$

其中 ω_0' 和 Ω_0' 很小．由于只要求理论在几百年内适用，所以 $\beta\omega_0'+\gamma\Omega_0'$ 是小量．于是，我们可把(4)式写成下列的形式：

$$\Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}[\cos(\alpha l+\delta l')\cos(\beta\bar{\omega}+\gamma\bar{\Omega}) \\ -\sin(\alpha l+\delta l')\sin(\beta\bar{\omega}+\gamma\bar{\Omega})].\tag{6}$$

对 $\cos(\beta\bar{\omega}+\gamma\bar{\Omega})$ 和 $\sin(\beta\bar{\omega}+\gamma\bar{\Omega})$ 进行展开，例如展成 t 的泰勒级数：

$$\begin{aligned}\cos(\beta\bar{\omega}+\gamma\bar{\Omega})&=\cos[\beta\omega_0+\gamma\Omega_0+(\beta\omega_0'+\gamma\Omega_0')t]\\ &=\cos(\beta\omega_0+\gamma\Omega_0)-(\beta\omega_0'+\gamma\Omega_0')t\sin(\beta\omega_0\\ &\quad+\gamma\Omega_0)+\cdots,\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}\sin(\beta\bar{\omega}+\gamma\bar{\Omega})&=\sin(\beta\omega_0+\gamma\Omega_0)\\ &\quad+(\beta\omega_0'+\gamma\Omega_0')t\cos(\beta\omega_0+\gamma\Omega_0)+\cdots.\end{aligned}$$

其中 $\sin(\beta\omega_0+\gamma\Omega_0)$ 和 $\cos(\beta\omega_0+\gamma\Omega_0)$ 是常数，通常我

们应用它们的数值．于是，(6) 式可写成

$$\Sigma m' C_{\alpha,\delta}\cos(\alpha l+\delta l')+\Sigma m' S_{\alpha,\delta}\sin(\alpha l+\delta l'), \quad (7)$$

其中 $C_{\alpha,\delta}$ 和 $S_{\alpha,\delta}$ 是关于 t 的多项式．因为在 R 的表达式里 m' 是因子，所以这里 m' 也是因子．只有在属于二体问题的项中没有作为因子的 m'.

83. 用调和分析的方法进行摄动函数的展开

这样，我们的任务是把解写成(7)式的形式．为此，把摄动方程也写成类似的形式是有益的．我们不需要把摄动函数展成所有四个引数 l, l', ω 和 Ω 的傅里叶级数，而只要对 l 和 l' 展开就够了．

除了勒威耶方法之外，在行星理论中所用的经典方法不要求计算代数形式的摄动函数展开式的系数．纯粹的分析展开式和已给出的月球展开式相同，这里不再赘述．我们将简短地描述可以把 a'/Δ 进行数值展开的方法（参看第 81 节)．任何其他同类型的函数也同样地进行展开．

首先，我们写出有待定系数的式子

$$\begin{aligned}F(l, l')=\frac{\Delta^2}{a'^2}&=1+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=-N'}^{N'}A_{ij}\cos(il+jl')\\&\quad+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=-N'}^{N'}B_{ij}\sin(il+jl')\\&=1+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N'}[(A_{ij}+A_{i-j})\cos il\cos jl'\\&\quad+(-A_{ij}+A_{i-j})\sin il\sin jl'\\&\quad+(B_{ij}+B_{i-j})\sin il\cos jl'\\&\quad+(B_{ij}-B_{i-j})\cos il\sin jl'].\end{aligned} \quad (8)$$

其中 N 和 N' 是预先这样选择的整数，使得可以忽略 N 和 N'

以后的项．而且，$A_{i,-0}=B_{i,-0}=0$。

对于 l 和 l' 的任何数值，都可用二体问题中应用的公式计算下列各量：

$$\frac{r}{a},\ \frac{r'}{a'}\ 和\ \cos S=\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}.$$

因此，我们能够得到计算函数 $F(l,l')$ 所要的许多值．

举例来说，我们注意到，如果计算

$$F(l,l')+F(2\pi-l,l'),$$

则得

$$2+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N'}2[(A_{ij}+A_{i-j})\cos il\cos jl' \\ +(B_{ij}-B_{i-j})\cos il\sin jl'],$$

其他两项已经消去．

重复这个过程几次，得

$$\begin{aligned} &F(l,l')+F(2\pi-l,l')+F(l,2\pi-l') \\ &\qquad +F(2\pi-l,2\pi-l') \\ &\quad =4+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N'}(A_{ij}+A_{i-j})\cos il\cos jl', \\ &F(l,l')-F(2\pi-l,l')-F(l,2\pi-l') \qquad\qquad (9) \\ &\qquad +F(2\pi-l,2\pi-l') \\ &\quad =\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N'}4(-A_{ij}+A_{i-j})\sin il\sin jl', \\ &F(l,l')-F(2\pi-l,l')+F(l,2\pi-l') \\ &\qquad -F(2\pi-l,2\pi-l') \\ &\quad =\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N'}4(B_{ij}+B_{i-j})\sin il\cos jl', \\ &F(l,l')+F(2\pi-l,l')-F(l,2\pi-l') \\ &\qquad -F(2\pi-l,2\pi-l') \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N'} 4(B_{ij} - B_{i,-j}) \cos il \sin jl'.$$

因此，我们着手解决形式为

$$\phi(l, l') = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N'} C_{ij} \cos il \cos jl' \tag{10}$$

的函数或式中以正弦代替余弦的类似的函数（这些函数已用类似的方式处理）的分析问题.

例如，在 $\phi(l, l')$ 的分析中，我们给 l' 以固定值 l'_0. 这样，我们考虑的是一个变量的函数，其中 l 可取任意值.

假定展开式限于取到 $A_3 \cos 3l$ 项，即

$$\phi(l, l'_0) = A_0 + A_1 \cos l + A_2 \cos 2l + A_3 \cos 3l$$

给出 l 的值为 $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ 和 π，得到四个未知数的四个方程，就可以解出这四个系数.

同样地可以算出下列更普遍的展开式的系数：

$$\phi(l, l'_0) = \sum_{i=0}^{N} A_i(l'_0) \cos il. \tag{11}$$

然后，我们给 l'_0 以任意值. 应用每一个系数 $A_i(l'_0)$ 的 N' 个特殊值进行如上的计算. 这些值的选择应使之可以进行类似于 $\phi(l, l'_0)$ 得到 $N+1$ 项的级数的计算：

$$A_i(l') = \sum_{j=0}^{N'} C_{ij} \cos jl'.$$

其中，C_{ij} 是不再依赖于任何参数的常数. 将此式代入(11)式，得

$$\phi(l, l') = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N'} C_{ij} \cos il \cos jl'.$$

上式与(10)式恒同表明，两种情况的 C_{ij} 确实具有同样的意义.

同样的计算可对由(9)式定义的四个函数之中的任一个进行，计算之后，我们得到下列四个量：

$$A_{ij}+A_{i-j},\ -A_{ij}+A_{i-j},$$

$$B_{ij}+B_{i-j},\ B_{ij}-B_{i-j}.$$

于是即得 A_{ij}, A_{i-j}, B_{ij} 和 B_{i-j}. 因此，我们获得所要求的形式为(8)的 $F(l, l')$ 的展开式.

备注：

采用布朗公式化的规则可以给出 l_0 和 l_0' 的特殊值使误差最小.

我们不仅仅能把 $(\Delta/a')^2$ 展成(8)式的形式，而且也可把二体的椭圆根数的任何已知函数展成此形式. 而且，如果我们已知一个函数的展开式，则可由级数运算找到并改进其他函数的展开式. 例如，设已知 $(\Delta/a')^2$ 的展开式，此展开式快速收敛并相对来说只需比较少的项，而且假设我们也已用同样的方式计算出 a'/Δ 的近似展开式，现在我们来说明如何改进它.

以 S 表示 a'/Δ 的近似级数，以 T 表示 $(\Delta/a')^2$ 的准确展开式，并以 ΔS 表示 S 的改正值，要求

$$T=\frac{1}{(S+\Delta S)^2}.$$

如果我们略去 ΔS^2，则得

$$T=\frac{1}{S^2+2S\Delta S},$$

或

$$S^2T=\frac{1}{1+\frac{2\Delta S}{S}}\doteq 1-\frac{2\Delta S}{S},$$

故得

$$\Delta S = \frac{1}{2}(S - S^3 T).$$

由傅里叶级数 S^2，S^3 和 S^3T 逐次相乘，然后逐项相减即得 ΔS.

然后，我们可令 $S_1 = S + \Delta S$，并用 S_1 重复上述过程直至 ΔS 小到可忽略为止.

84. 其他的数值展开式

摄动函数展为形式(8)的其他方法是以 $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s/2}$ 的傅里叶展开式为基础的. 这里，s 是一个整数，而 $\alpha < 1$：

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s/2} = \frac{1}{2} b^{0}_{s/2} + \sum_{j=1}^{\infty} b^{(j)}_{s/2} \cos j\theta.$$

数 $b^{(j)}_{s/2}$ 称为拉普拉斯系数，已被研究过并已列成表格.

具有拉普拉斯系数的展开式是基于下列事实：r/r' 接近于 $a/a' = \alpha$，和

$$\left[1 - 2\frac{r}{r'}\cos S + \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right]^{-s/2}$$

的展开式接近于

$$[1 - 2\alpha\cos S + \alpha^2]^{-s/2}$$

的展开式.

如果需要的话，也可以采取类似于卫星采用的分析方法，虽然它们收敛缓慢. 代入根数的平均值，我们可把这些表达式表为所要的形式.

85. 用直角坐标摄动力表示的摄动运动方程

最常用于建立行星理论的方法是汉申建立月球理论所提出的方法，在近日点的运动不大的情况下，这个方法得到了简

化.

略去要求冗长证明的细节，我们集中于讨论此法的主要特征.

汉申方法是从一种辅助椭圆上的近似椭圆运动着手的，这种辅助椭圆的形状和大小固定，位于密切轨道平面内，其近日点以预先确定的方式运动. 和月球的情况不同，这里我们不把密切椭圆当成中间轨道，而是由这种辅助的固定椭圆起中间轨道的作用. 在行星理论中，把近点当成是固定的，而在月球的理论中，则把它当成是具有与观测到的平均运动一致的旋转. 摄动表为向径的相对变化和按照二体问题公式在辅助椭圆上运动的天体的平经变化.

首先，分解摄动力为三个分量*：向径分量 R，在轨道平面内垂直于向径的分量 S 和垂直于轨道平面的分量 W. 应用拉格朗日方程，可得摄动方程为：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2e\sin v}{n\sqrt{1-e^2}}R + \frac{2a\sqrt{1-e^2}}{nr}S, \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin v}{na}R + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\left[\frac{a^2(1-e^2)}{r}-r\right]S, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r\cos(\omega+v)}{na^2\sqrt{1-e^2}}W, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r\sin(\omega+v)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{-\sqrt{1-e^2}\cos v}{nae}R \\
&\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}\sin v}{nae}\left(1+\frac{r}{a(1-e^2)}\right)S
\end{aligned}\right\}\quad(12)
$$

---

* 此段英文本有误，现按法文本改正. ——译者注

$$
\left.
\begin{aligned}
&\qquad -\frac{r\sin(\omega+v)\cot g i}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\
&\frac{dM}{dt}=n-\frac{1}{na}\left(2\frac{r}{a}-\frac{(1-e^2)\cos v}{e}\right)R\\
&\qquad -\frac{(1-e^2)\sin v}{nae}\left(1+\frac{r}{a(1-e^2)}\right)S.
\end{aligned}
\right|
$$

其中，n 是由第一方程算出的 a 得到的.

备注:

采用这种方程组能够研究任何力的系统所引起的摄动，特别适用于非引力的情况. 例如，人造卫星所受到的大气阻尼和辐射压力. 计算是这样进行的: 用$\mathscr{R}$表示摄动函数，而摄动力沿固定的坐标轴 Ox，Oy 和 Oz 的三个分量为:

$$
\left.
\begin{aligned}
m\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial x}=&R[\cos(\omega+v)\cos\Omega\\
&-\sin(\omega+v)\sin\Omega\cos i]\\
&-S[\sin(\omega+v)\cos\Omega+\cos(\omega\\
&+v)\sin\Omega\cos i]+W\sin\Omega\sin i,\\
m\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial y}=&R[\cos(\omega+v)\sin\Omega\\
&+\sin(\omega+v)\cos\Omega\cos i]\\
&-S[\sin(\omega+v)\sin\Omega-\cos(\omega\\
&+v)\cos\Omega\cos i]-W\cos\Omega\sin i,\\
m\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial z}=&R\sin(\omega+v)\sin i\\
&+S\cos(\omega+v)\sin i+W\cos i.
\end{aligned}
\right\}\quad(13)
$$

应用 x,y,z 的椭圆根数的函数表达式(第 15 节(25)式)，可得

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial a}&=\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},\\
\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial e}&=\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial e}+\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial e}+\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial e}.
\end{aligned}
\right\}\quad(14)
$$

对于 i, Ω, ω 和M得到类似的表达式.

把(13)式代入(14)式，再把结果代入拉格朗日方程即得方程组(12)式.

86. 汉申方法中的变量

为了得到汉申方法，我们可把(12)式简化得到向径和平经的摄动方程，它们是单一量 $\overline{W}$ 的函数.

我们来考察一个半长径 a_0，偏心率 e_0 和平均运动 n_0 的辅助椭圆，$\mu = n_0^2 a_0^3$.

独立变量 z 是这样定义的：令运动点 M_0 的平近点角总是等于 $n_0 z$，而且保持此点坐标的经典关系式（参看第 14 节）：

$$\left.\begin{aligned} r_0 \cos v_0 &= a_0(\cos E_0 - e_0), \\ r_0 \sin v_0 &= a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \sin E_0, \\ n_0 z &= E_0 - e_0 \sin E_0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中，r_0、v_0 和 E_0 分别为辅助椭圆的向径、真近点角和偏近点角. 以 P_0 表示辅助平面上测量经度的起始固定点，得出真经度为 $\overset{\frown}{P_0M_0} = \bar{\omega}_0 + gt + v_0$. 选择 P_0 使此经度等于受摄天体的真经度.

在上面的表达式中，gt 代表近点的平均运动，它在月球的理论中保留着，但在行星的理论中则被略去，在下面我们仅讨论后者.

我们已经注意到，由于辅助椭圆必须在密切平面内，因此表示受摄天体的M点也必须在同一平面内，其真经度为

$$l = v + \chi.$$

其中，χ 是从 P_0 起计的密切近点的经度. 我们有

$$l = v + \chi = \bar{\omega} + v. \tag{16}$$

我们可以这样地选择任何时刻在辅助椭圆上的 z，使得辅助椭圆的向径与受摄行星的向径一致．这样选择的结果，z 就不是时间 t 的线性函数．事实上，z 随时间 t 的变化表征着作为 t 的函数的向径方向（也就是真经度的方向）的摄动．知道了函数 $z(t)$，我们就可以应用（15）式求得函数 $v_0(t)$，然后，利用（16）式得出受摄天体的真经度：

$$l = v_0(t) + \bar{\omega}_0.$$

确定了向径以后，从下式

$$r_0(t) = a_0(1 - e_0 \cos E_0),$$

我们得到辅助椭圆上相应点的位置，而到受摄天体的原点的距离将以 r 表示．

以 ν 表示量

$$\nu = \frac{r}{r_0} - 1.$$

如果我们已知 t 的函数 $\nu(t)$，则

$$r(t) = r_0(t)(1 + \nu(t)).$$

因此，受摄天体在密切椭圆平面中的位置由函数 $z(t)$ 和 $\nu(t)$ 所确定．

最后，密切平面位置的变化是由假想的运动体（在倾角固定的平面内并具有同样的经度和向径）和密切平面内真实的运动体之间的纬度差 $\delta\beta$ 所确定．

$z(t)$，$\nu(t)$ 和 $\delta\beta(t)$ 一起，完全确定了天体在任何时刻的位置．下面我们只给出确定天体在固定平面内的变化的 z 和 ν 的方程．

87. 汉申方法的计算

从（12）式出发，我们可以求出 z，ν 和 β 的微分方程．但是，计算是比较冗长的．由此得到的方程是一阶的，其右端

可用 R，S 和W表示，$\frac{dz}{dt}$ 和 $\frac{d\nu}{dt}$ 的形式如下：

$$\frac{dz}{dt}=1+\overline{W}=\frac{a_0\sqrt{1-e^2}}{a\sqrt{1-e_0^2}}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^2,$$

$$\frac{d\nu}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{W}}{\partial z}.$$

在 $\frac{\partial\overline{W}}{\partial t}$ 的表达式中，借助于 r_0 和 ν_0，把 z 当成常数，可以推出 $\partial\overline{W}/\partial t$ 为 R，S 和W的函数的表达式。然后，可以像本章开始时对摄动函数的展开一样，把 $\partial\overline{W}/\partial t$ 展成下列形式：

$$\frac{\partial\overline{W}}{\partial t}=\sum_{i,j,k}C_{ijk}\cos(il+jl'+k\lambda)$$

$$+\sum_{i,j,k}S_{ijk}\sin(il+jl'+k\lambda).$$

其中，λ 是辅助椭圆的平近点角(所以是 z 的函数)，l 和 l' 是行星和摄动体的平近点角，它们是 t 的函数.

上列展开式的某些项具有形式：

$$C_{00k}\cos k\lambda \text{ 和 } S_{00k}\sin k\lambda.$$

这些项对于 t 来说是常数，因此，积分之后将引入 $t\cos k\lambda$ 和 $t\sin k\lambda$ 形式的项.

由于 $\lambda=l$，我们可用 l 代替 λ，所以

$$\overline{W}=\sum_{ij}C_{ij}\cos(il+jl')+\sum_{ij}S_{ij}\sin(il+jl')$$

$$+\sum_i tC_i\cos il+\sum_i tS_i\sin il.$$

由 $\overline{W}$ 积分得到的 ν 和 z 的形式也一样，所以 ν 和 z 也包含 $t^2\sin il$ 和 $t^2\cos il$ 项.

这些长期项和混合项确实具有第 82 节方程(7)所呈现的特征. 积分常数必须由理论结果和观测的比较确定.

最后,对一个新函数 U(与 $\overline{W}$ 不同) 进行类似的处理能够求得纬度项.

88. 高阶行星理论

我们已经简要地讨论了一个行星 P 受到另一个在克普勒轨道上运动的行星 P_i 摄动的情况下,建立行星运动理论可能的方法之一. 但是,还有其他的方法,如勒威尔方法或纽康方法,它们都具有各自的优点和缺点. 尽管它们采用了不同的变量和参数,但都得到(7)式类型的表达式.

行星 P 完整的一阶运动理论应当是分别地考虑每一个摄动行星 P_i 的影响,然后总加起来得出的. 根据(7)式,解的一般形式为

$$\sum_{i,j,k} m_i C_{ijk}(t)\cos(jl + kl_i') + \sum_{i,j,k} m_i S_{ijk}(t)\sin(jl + kl_i'), \tag{17}$$

其中, m_i' 和 l_i' 是行星 P_i 的质量和平近点角.

但是,根据把摄动行星当成在一个椭圆轨道或是在受摄椭圆上运动,其摄动作用是略微不同的. 现在,我们考虑摄动天体 (17) 式形式的一阶理论,并计算出受摄天体 P 所受到的摄动(我们已知这种问题的一阶理论). 我们可以进行与一阶理论同样的运算,不过,在摄动函数中,我们不用椭圆运动研究得出的表达式,而代入 (17) 型的表达式. 这样得到的摄动函数将包含质量积 ($m_i m_i'$ 或 m_i^2) 作为因子的项,其形式为

$$\sum_{hijkg} m_h m_i C_{hijkg}(t)\cos(jl + kl_i' + gl_h')$$

$$+\sum_{hijkg} m_h m_i S_{hijkg}(t)\cos(jl + kl'_i + gl'_h). \qquad (18)$$

用一种与一阶方法相关连的方法(例如汉申方法)进行积分,得到的不仅仅是一阶项,而且也有(18)型的项,其因子包含两个质量,而其中的三角函数可以依赖于三个不同的近点角.

因此,为了得出所有的二阶项,我们一方面必须研究所有由受摄行星 P 形成的可能星对,另一方面,还要研究摄动行星所形成的每一个星对. 当然,这就必须建立所有行星 P_i 的一阶理论.

实际上,在计算二阶理论的某些部分之前,我们必须先估计摄动的大小,就好象我们必须估计截断摄动函数(或类似的量)的级数展开式所带来的误差一样. 在现代的观测精度下,必须将计算进行到相当后的阶段.

因此,建筑在汉申方法基础上的克里门斯的火星理论包含某些三阶项,特别是那些和木星质量立方与木星质量平方乘土星质量有关的项. 最后的理论总计保留了近1000个引数.

在木星和土星的希耳理论(1890)中,也出现了一些三阶项. 其他大多数行星理论没有超出一阶项的范围.

89. 纯数值方法

从人造卫星在单纯的引力场中运动开始,经过月球的运动,直到行星(如火星)的完整运动理论,我们研究了越来越复杂的理论. 在天体力学中,问题越是复杂,我们越是不得不放弃分析的和文字的展开式,而赞成采用一些纯数值的参数展开式,直至完全采用纯数值的表达式,如汉申理论.

进一步的改革是不给出傅里叶形式的解。我们可以设计

出数值积分的方法，只给出所讨论的天体的星历表，即给出时间间隔固定的许多离散时刻天体的位置，而中间任何时刻的位置则由简单的内插得到．正如我们将要看到的，这些方法不再是代数的或分析的方法，与力学概念和微分方程理论无关，只要求数值的分析．这些方法非常适用于电子计算机计算而很常被使用，特别是用于行星的计算中．现在，我们来介绍最常用的科威耳方法，然后讨论这类方法的重要性．

90. 数值积分的形式

考察函数 $f(t)$，其值在一定的时间间隔 h 上为已知．这些时间间隔称为步长．设这些时刻为 t_0，t_0+h，t_0+2h，$\cdots$，t_0-h，t_0-2h 等，相应的函数值为 f_0，f_1，f_2，$\cdots$，f_{-1}，f_{-2} 等．

根据下列的计算公式建立中心差分表：

一阶差分 $\quad f^1_{\frac{n+(n+1)}{2}}=f_{n+1}-f_n$，

二阶差分 $\quad f^2_{\frac{n+(n+1)}{2}}=f^1_{n+1}-f^1_n$．

p 阶差分由 $p-1$ 阶差分算出，其公式为，

p 阶差分 $\quad f^p_{\frac{n+(n+1)}{2}}=f^{p-1}_{n+1}-f^{p-1}_n$． $\qquad$ (19)

利用下面定义式由 $'f$ 和 $''f$ 完成差分表左边部分的计算：

$$\begin{aligned} f_n &= 'f_{n+\frac{1}{2}}-'f_{n-\frac{1}{2}}, \\ 'f_n &= ''f_{n+\frac{1}{2}}-''f_{n-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \qquad (20)$$

这些量可由前一行算出，但有一个附加的常数．

现在，定义下列附加量：

$$'f_n=\frac{1}{2}('f_{n+\frac{1}{2}}+'f_{n-\frac{1}{2}}), \qquad (21)$$

$$f_n^p = \frac{1}{2}\left(f_{n+\frac{1}{2}}^p + f_{n-\frac{1}{2}}^p\right).$$

当 $f(t)$ 满足方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$ 时，可求得

$$''f_n = \frac{x(t_0 + nh)}{h^2} - \frac{1}{12} f_n + \frac{1}{240} f_n^2 - \frac{31}{60480} f_n^4 + \frac{289}{3628800} f_n^6 + \cdots, \quad (22)$$

表 3

引数									
		$'f_{-7/2}$							
$t_0 - 3h$	$''f_{-3}$		f_{-3}						
		$'f_{-5/2}$		$f_{-5/2}^1$					
$t_0 - 2h$	$''f_{-2}$		f_{-2}		f_{-2}^2				
		$'f_{-3/2}$		$f_{-3/2}^1$		$f_{-3/2}^3$			
$t_0 - h$	$''f_{-1}$		f_{-1}		f_{-1}^2		f_{-1}^4		
		$'f_{-1/2}$		$f_{-1/2}^1$		$f_{-1/2}^3$		$f_{-1/2}^5$	
t_0	$''f_0$		f_0		f_0^2		f_0^4		f_0^6
		$'f_{1/2}$		$f_{1/2}^1$		$f_{1/2}^3$		$f_{1/2}^5$	
$t_0 + h$	$''f_1$		f_1		f_1^2		f_1^4		
		$'f_{3/2}$		$f_{3/2}^1$		$f_{3/2}^3$			
$t_0 + 2h$	$''f_2$		f_2		f_2^2				
		$'f_{5/2}$		$f_{5/2}^1$					
$t_0 + 3h$	$''f_3$		f_3						
		$'f_{7/2}$							

$$'f_{n\pm1/2} = \frac{x'\left(t_0 + nh \pm \frac{h}{2}\right)}{h} \pm \frac{1}{2} f_n + \frac{1}{12} f_n^1 - \frac{11}{720} f_n^3 + \frac{191}{60480} f_n^5 + \cdots. \quad (23)$$

其中，x' 是在所标明的时刻 x 对 t 的导数值.

91. 数值积分的起步问题

设运动的初始状态即天体的坐标 x_0, y_0, z_0 和速度 x_0', y_0', z_0' 为已知，微分方程的形式为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= f(x, y, z, x', y', z', t), \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= g(x, y, z, x', y', z', t), \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= h(x, y, z, x', y', z', t).
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

上式中 x', y' 和 z' 一般不出现，但考虑介质的摩擦力则可能引入．设摄动体的坐标是时间的已知函数，则把 t 也引入上面微分方程的右端．设公式（22）和（23）分别取到 f^n 和 f^p 项，则计算的程序如下：

（1）首先假定所有的差分 $f^1, \cdots, f^n$ 均为零，由 x_0, y_0, z_0 和 t_0 算出 f_0，再利用(22)式和(23)式推出 $''f_0$, $'f_{-1/2}$ 和 $'f_{1/2}$. 对类似的量 g 和 h 进行同样的计算．

（2）假定所有的 f 项均相同，得出表 3 中 f 项的那一列，由此我们写入 f_{-3}, f_{-2}, f_{-1}, f_1, f_2 和 f_3. 同样的做法列出 g 表和 h 表的项．

（3）现在，从 (20) 式可算出表 3 中所有的 $'f$ 和 $''f$ 项．因此，利用 (22) 式和 (23) 式，我们能够算出每一时刻的坐标和速度．把这些计算的结果代入（24）式的 f 中．因此，利用 (21) 式我们可以算出表中三角形全部元素．

（4）这种数值积分方法的基本假设是所有的 f^6 项均等于 f^6_0，在上一步刚刚计算过 f^6_0. 应用(21)式计算所有 $i \leqslant 5$ 和 $-7/2 \leqslant j \leqslant 7/2$ 的 f^i_j 项，列出一个矩形表．

（5）应用 (22) 和 (23) 的完全形式和完全的矩形表，可以算出 x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, x_3 和相应的 x' 项．

（6）重复上述 3—5 的计算，建立关于 g 和 h 的表．

（7）这样，得到了 $t-3h$ 和 $t+3h$ 之间所有时刻的坐标 x, y, z 和导数 x', y', z' 的新值，我们就可以重新计算对应于这些时刻的 f, g 和 h 项的值，并把这些新值代

入表中 f，g 和 $\bar{h}$ 列。

(8) 重复第 4 步的计算，完成三角形表，并继续这个过程，直到新的叠代不再引起表列值的变动为止。

这样，我们得到了 t_0-3h 和 t_0+3h 之间七个时刻的七个未知数的值．对应于函数 f，g 和 $\bar{h}$ 的第七阶差分为零。

92. 数值积分的累进

一旦矩形表已经建立并已稳定，我们就可以开始进行数值积分的累进计算，得出在递增时刻系列 t_0+nh 的未知数的值。

表 4

引数									
t_0	$''f_0$		f_0		f_0^2		f_0^4		f_0^6
		$'f_{1/2}$		$f_{1/2}^1$		$f_{1/2}^3$		$f_{1/2}^5$	
t_0+h	$''f_1$		f_1		f_1^2		f_1^4		f_1^6
		$'f_{3/2}$		$f_{3/2}^1$		$f_{3/2}^3$		$f_{3/2}^5$	
t_0+2h	$''f_2$		f_2		f_2^2		f_2^4		f_2^6
		$'f_{5/2}$		$f_{5/2}^1$		$f_{5/2}^3$		$f_{5/2}^5$	
t_0+3h	$''f_3$		f_3		f_3^2		f_3^4		f_3^6
		$'f_{7/2}$		$f_{7/2}^1$		$f_{7/2}^3$		$f_{7/2}^5$	
t_0+4h									

表 4 列出了从 t_0 到 t_0+4h 的差分表.

我们用下面的方法把这个差分表往前推进一步，并定出 x，y，z 和 x'，y'，z' 的值.

(1) 设 $f_4^6=f_3^6$，先用 (21) 式，再用 (20) 式，计算下列的 f 值

$$f_{9/2}^5,\ f_4^4,\ f_{9/2}^3,\ f_4^2,\ f_{9/2}^1,\ f_4^0,\ 'f_{9/2}\ 和\ ''f_4.$$

关于 g 和 $\bar{h}$ 表也进行同样的计算 .

(2) 应用 (22) 式和 (23) 式，从上面的结果推算出 x_4，

y_4, z_4 和 x'_4, y'_4, z'_4, 这就能够重新计算 f_4, g_4 和 $\bar{h}_4$.

(3) 应用(21)式,由 f_4 的新值可改进差分 $f^1_{7/2}$, 并依次改进 f^2_3,$f^3_{5/2}$, f^4_2, $f^5_{3/2}$ 和 f^6_1. 对 g 和 $\bar{h}$ 的情况也同样进行.

(4) 令 f^6_2, f^6_3 和 f^6_4 等于 f^6_1, 如同上节第 4 点, 改进所有从这些 f^6 项算出的差分. 对 g 和 $\bar{h}$ 也同样进行.

(5) 由(22)式和(23)式计算 t_0+h, t_0+2h, t_0+3h 和 t_0+4h 时刻的 x, y, z 和 x', y', z' 值, 这就能够重新算出相应时刻的函数 f, g 和 $\bar{h}$.

(6) 现在,我们可以重新计算全部 $'f$ 和 $''f$ 函数以及这三个表中的差分.

(7) 重复第 4 点的计算, 直至得到 f_1, g_1, $\bar{h}_1$, x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1 和 z'_1 的稳定值为止.

这样, 把这些值当成最后的值, 下标增加 1, 重复进行第一点的计算. 如此以往, 直至计算扩展到要求的时刻为止.

93. 数值积分的性质

上述数值积分的科威耳方法可以有许多不同的形式, 其中的一种由计算 f 和 $''f$ 的线性函数代替相继的差分递推, 特别适用于计算机的计算.

三个不同的公式可以:(1) 外推出下一步 x 的新值. (2) 改进已知的近似值; (3) 已知几个后面的 f 函数外推值, 检验此结果;

科威耳方法的不同形式所保留的(22)式和(23)式中的项数也不同. 当然, 保留的项数多寡取决于要求的精度和步长 h 的长短. 此外, 对每一种积分的精度检验可以决定是否将步长加倍或减半.

在恩克提出的并常用于天体力学的另一种数值积分方法中,不应用运动的微分方程,而是采用在给定时刻的密切椭圆

运动的摄动方程．每当摄动很可能已经改变了旧的轨道并使摄动力产生显著变化时，我们时时进行修正，以便能够进行改进得到新的密切椭圆轨道．在恩克方法中的近似取到二阶摄动．

当摄动很小时，恩克方法是比较有利的；而当要求频繁改进轨道时，则变得很困难．

包含在各种数值积分方法中的误差来源有二：其一是由于略去(22)式和(23)式中某些项引起的(截断误差)；其二是运算过程产生的近似(舍入误差)．公式(22)和(23)是已知的，我们可以找到一种步长，使第一种类型的误差和要求的精度相比小到可以忽略．但是，第二种类型的误差则随着步长数的 3/2 方而线性增大．

由于数值积分的目的是求得天体在时间间隔 Δt 内的星历表，缩短步长可以减小截断误差，但是这将引起舍入误差的增大．

另一方面，如果我们加长步长，则必须处理(22)和(23)展开式中更多的项以便减小截断误差．但是，由于这种方法的不稳定性和需要大大增加计算量，不能把展开式无限地扩展．

每圈取 50 步或 100 步，公式用到第 8 阶差分和 10 位有效数字，数值积分达到最佳的状态．

94. 数值积分的应用

在开始的时刻，坐标和速度分量等价于分析方法中的积分常数，同这些积分常数一样也是不能直接由观测决定的．因此，我们采用下面的方法进行处理：

(1) 以初始状态的近似值进行第一次数值积分，将积分结果和观测值进行比较，对每一个观测时刻求出观测值与计

算值之差，即列出（$o-c$）差值表.

（2）用六种初始值进行六次新的数值积分，计算出其中每一个初始值的单位变差引起的计算结果的变差.

（3）定出初始值中必须引进的变差值，使上述第一步得到的（$o-c$）差值为最小. 如果结果尚不理想，则可应用一种估值法如最小二乘法重复进行第一步的计算.

这是在某一个时间间隔内代表观测和从数值积分的最后结果预报位置的最佳方法. 这种技术现在用于在几天的时间内预报短期人造卫星轨道位置. 考虑并快速地计算许多摄动因素，如地球的扁形，大气阻尼和辐射压是可能的.

这种方法广泛地用于研究行星的运动. 例如现在通用的木星、土星、天王星、海王星和冥王星星历表的编算.

95. 数值积分和分析理论的比较

由于在第93节末尾提到的缺点，限制了数值积分可以处理的运转圈数，因此把数值积分技术用于计算观测圈数很多的卫星是困难的，而用于行星和短寿命的人造卫星则较合适.

数值积分代表了现今计算天体在给定的时间间隔内精确轨道的最快最有效的方法. 但是，尽管有这些优点，数值积分方法仍然不能满足天文学家们的要求，其原因有二:

首先，数值积分局限于有限的时间间隔，对于这个时间区间之外的运动没有给出表示(甚至连定性的表示也没有). 反之，在同样的时间间隔内具有给定精度的普遍理论，对于扩大十倍的时间间隔，仍然保持很好的近似，而且给出了这个时间间隔之外运动的重要定性表示，特别是对于纯三角的普遍理论而没有任何长期项时更是这样.

其次，天文学家们对区分原因和效果以及辨别天体所受摄动的准确起源特别感兴趣. 这一点采用分析表达式可以办

到；而在数值积分中，各种摄动总加在一起，不可能得到其中任一种摄动的形式的迹象.

因此，通过数值积分结果的调和分析形成中间轨道，可以把数值积分作为建立分析理论的中间步骤. 数值积分方法也可用于验证独立地建立的分析理论. 由此可见，数值积分方法是可同傅里叶级数与调和分析方法相比较的强有力的数学工具. 尽管如此，建立越来越精密的分析理论仍然是天体力学的中心任务.

参 考 文 献

Andoyer, H., Cours de mécanique céleste. 2 vols. *Gauthier-villars, Paris*, 1923—1926.

Brouwer, D. and Clemence, G. M., Methods of celestial Mechanics. *Academic Press, New York*, 1961.

Brown, E. W. and Shook, C. A., Planetary Theory, *Dover reprint, New York*, 1964

Chazy, J., Mecanique celeste. *Presses universitaires de France, Paris*, 1953.

Danjon, A., Astronomie generale. *Editions sennac*, 1960.

Moulton, F. R., An Introduction to celestial Mechanics. 13 *th ed. The MacMillan co., New York*, 1959.

Smart, W. M., Celestial Mechanics. *Longmans, Green & Co., London*, 1953.

Tisserand, F., Traité de mécanique Céleste. 4 *vols. Gauthier-Villars, Paris. vols.* 1—2, *rev. ed.* 1960—1962; *vol.* 3—4, 1896